

## Estudio y modelación del flujo bifásico líquido-gas para bajos valores de Reynolds

### Study and modelation for low reynolds value of two phases flow liquid-gas

Annamaris Olmo-Velázquez<sup>I</sup>, Margarita-de-la-Victoria Piedra-Díaz<sup>II</sup>, Leorlen Rojas-Mazaira<sup>II</sup>, Melchor Rodríguez-Madrigal<sup>III</sup>, Erich Martínez-Martín<sup>II</sup>

I. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Centro de Estudios de Matemática. La Habana, Cuba  
Correo electrónico: [olmo@cemat.cujae.edu.cu](mailto:olmo@cemat.cujae.edu.cu)

II. Instituto Superior de Ciencias Nucleares, Facultad de Ciencias Técnicas y Nucleares. La Habana, Cuba

III. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Facultad de Ingeniería Mecánica. La Habana, Cuba

Recibido: 17 de noviembre de 2014

Aceptado: 22 de diciembre de 2014

---

#### Resumen

El flujo simultáneo de líquido y gas es una de las combinaciones más complejas de flujo bifásico. Para este estudio se seleccionaron como fluidos de trabajo Glicerina en solución con agua al 80 % y Gel industrial. Estos por sus viscosidades permiten establecer los sistemas deseados para el estudio, con valores de Reynolds menor a 15. Fueron desarrollados experimentos para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los fluidos y los parámetros que caracterizan este tipo de flujo en un canal vertical. Fue obtenido a partir del análisis físico matemático de los experimentos realizados, un modelo teórico experimental capaz de evaluar las fuerzas y coeficientes de arrastre para una burbuja aislada y un tren de burbujas. Se realizaron modelaciones computacionales de los distintos regímenes de trabajo, validadas con los resultados experimentales. Obteniéndose simulaciones y resultados que permiten visualizar y analizar el comportamiento real del sistema.

**Palabras claves:** flujo bifásico, número de Reynolds, burbuja aislada, tren de burbujas, coeficientes de arrastre, fuerzas de arrastre.

#### Abstract

The study of simultaneous flow of liquid and gas over a conduit is two phases flow combinations more complex that exist. For the study we select fluid (glycerin in solution with water (80 %) and industrial gel) that establish flow models necessary for the investigation the desired systems. And is obtained from physical-mathematical analysis of obtained results made experiment for different configurations, a theorys experimental model have evaluate the drag coefficient and force acting on only bubble and train bubbles in job regimen for Reynolds value less and equal to 15. In the present study was performed computational modeling of different patterns, validated with experimental results. Simulations and results obtained for visualizing and analyzing the actual system behavior. These models are ready for been used for other configurations in future studies.

**Key words:** two phases flow, Reynold's number, only bubble, train of bubble, drag coefficient, drag forces.

## Introducción

Los flujos bifásicos líquido-gas son ampliamente estudiados por su constante presencia en procesos industriales y cotidianos. En la industria petroquímica es de interés el conocimiento de su comportamiento así como su caracterización, por los efectos que conlleva su presencia en equipamientos como los reactores químicos especializados [1].

El desarrollo del flujo bifásico líquido-gas en un canal está en gran medida definido por el comportamiento o variación de determinados parámetros como las fuerzas y coeficientes de arrastre, la viscosidad y las velocidades de las fases. El determinar los patrones de flujo constituye un reto asociado a la optimización en el diseño y desarrollo de componentes de los sistemas en los cuales está presente.

En la literatura especializada existen un conjunto de modelos de correlación y mecanicistas para determinar patrones de flujo en canales horizontales y ligeramente inclinados. El modelo Mandhane [2] es aplicable únicamente a flujo horizontal. El modelo de correlación de Mukherjee y Brill [3] y los modelos mecanicistas de Xiao [4], Barnea [5] y Taitel y Dukler [6] tienen una precisión acorde a los datos experimentales del 76,5 %, 81 %, 83,3 % y 86,9 %, respectivamente, para ángulos de inclinación del canal entre 00 y 100.

Los modelos propuestos por M.C. Ruzicka [7] incluyen un conjunto de ecuaciones para la descripción del flujo mediante la determinación de las fuerzas que actúan sobre las burbujas y sus coeficientes. Con la limitación de su empleo solo en regímenes de trabajo con valores de Reynolds mayores a cincuenta.

En esta investigación se realiza un estudio del flujo bifásico líquido-gas mediante la experimentación y la modelación computacional para determinar los patrones de flujo en un canal vertical en regímenes de trabajo con valores de Reynolds menores a 15. Adicionalmente se desarrolla un modelo cuadrático capaz de evaluar los coeficientes de arrastre para una burbuja aislada y un tren de burbujas bajo las condiciones anteriormente planteadas.

Este estudio se realiza bajo las siguientes consideraciones:

Inexistencia de transferencia de masa entre las fases líquida y gaseosa.

La fase líquida es tratada como un fluido incompresible.

Las propiedades físicas son constantes en ambas fases, aunque en la fase gaseosa la densidad tiene dependencia de la presión debido a la variación de la altura de la columna.

La temperatura es uniforme e invariable en el dominio

Las propiedades de un fluido son las que definen el comportamiento y características del mismo tanto en estado de reposo, como en el de movimiento [8]. Para el estudio realizado se seleccionaron fluidos que permiten establecer los modelos de flujos necesarios, resultando indispensable conocer o determinar las propiedades hidrodinámicas de los mismos; estos son: glicerina en solución con agua (80 %) y gel industrial [9, 10].

Para describir el flujo objeto de estudio se aplicaron los criterios generales de la mecánica de los fluidos: Las ecuaciones gobernantes sobre volúmenes de control finitos se resuelven en forma unidimensional y en estado permanente o transitorio (como aproximación al modelo que se asume).

Para evaluar las velocidades de las burbujas y los coeficientes de arrastre se emplearon los modelos Katz y Meneveau, KM, con y sin corrección viscosa. [11, 12]

Como modelo de estudio se tomó el caso *free-end*. Este modelo considera que las burbujas son de igual tamaño y que se mueven libremente en la dirección vertical bajo la acción de los efectos de flotación en el seno de un líquido que no provoca efecto pared. Aquí se supone que las fuerzas que actúan sobre cada burbuja son:

- Fuerza de flotación.
- Fuerza por arrastre viscoso.
- Fuerza de inercia.

También se asumió que cada burbuja interactúa solo con las vecinas más cercanas, o sea, la anterior y la posterior y que sobre estas actúan tres fuerzas (rozamiento viscoso, empuje y la inercial no viscosa). Este modelo permite la simplificación de un conjunto de variables que facilitan el análisis de la influencia de las fuerzas creadas por una burbuja sobre la siguiente, se cumple para bajos valores de Reynolds, que es la condición fundamental del sistema de estudio y experimentalmente es un sistema fácil de recrear.

El objetivo principal de este trabajo es determinar los factores que inciden en las fuerzas de arrastre en la fase dispersa en el flujo bifásico líquido-gas. Para ello se estudiaron los modelos teóricos que presentan las dependencias de los factores que inciden en las fuerzas de arrastre en la fase dispersa, se diseñaron instalaciones experimentales para la determinación de los parámetros que inciden en el movimiento ascendente de las burbujas, se realizaron modelaciones computacionales y se compararon los resultados obtenidos experimentalmente con los de los modelos teóricos.

## Métodos y Materiales

### Modelo propuesto

En este trabajo se realizó el estudio del sistema compuesto por burbujas inmersas de aire como fase dispersa en Gel industrial y Glicerina al 80 %. Para una entrada de aire ubicada en la parte inferior del canal con un diámetro del canal de inyección de 0,5 mm; 0,8 mm y 1,0 mm. Con valores de Reynolds menores a 15.

### Ecuaciones del movimiento de una burbuja aislada

Para la evaluación de la ecuación del movimiento, primero hay que conocer las fuerzas que actúan sobre una burbuja:

- Fuerzas viscosas
- Para el caso del movimiento de una burbuja esférica a pequeños valores de Re ( $Re \leq 1$ ) la bibliografía consultada considera solo la fuerza de Arquímedes y la de gravedad y para  $Re > 1$  incluye las fuerzas de arrastre, [8].
- Fuerzas presentes debido a la deformación de la burbuja. [9]

### Fuerza resultante que actúa sobre una burbuja

Para el modelo objeto de estudio es importante establecer un régimen de flujo unidimensional. Esto se puede obtener simplificando el modelo para pequeñas velocidades de las fases como unidimensional o aplicando continuos con altos valores de la viscosidad dinámica. Para tener en cuenta las características hidrodinámicas del fluido, tanto lejos como cerca de la burbuja, se empleó la ecuación 1, la cual toma en cuenta la densidad, viscosidad y radio de la burbuja y el número de Reynolds.

$$F_1 = -6\pi\rho_c v_c WR \{F(R_e)\} \quad (1)$$

Donde  $\rho_c$  y  $v_c$  son la densidad y la viscosidad cinemática del fluido continuo, W - velocidad de la burbuja relativa al flujo

Condiciones de frontera (burbuja esférica)

$$(u_\theta)_{r=R} = 0 \quad (u_r)_{r=R} = 0$$

Donde  $u_\theta$  y  $u_r$  son las velocidades angular y radial respectivamente.

Para caracterizar el movimiento del fluido es necesario determinar aquellas propiedades que permitan describir la hidrodinámica del mismo como lo son: la densidad y la viscosidad. En la determinación de estas propiedades fueron aplicados diversos métodos de acuerdo a las características de cada sustancia utilizada, ver tabla 1.

**Tabla 1.** Resumen de datos con las propiedades del fluido de trabajo

Propiedades	Viscosidad Dinámica $\mu [Pas]$	Tensión Superficial $\sigma \left[ \frac{N}{m} \right]$	Densidad $\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
Agua	0,001010000	0,0728000	996
Gel industrial	0,045893214	0,0422000	1056
Glicerina 80 %	0,084000000	0,0675571	1200

Para el desarrollo del estudio se emplearon:

- 5 litros de gel industrial
- 5 litros de glicerina en solución con agua al 80 %
- 1 Densímetro
- 1 Balanza digital
- 10 Beakers de 10 ml
- 1 Viscosímetro
- 1 Vidrio reloj
- 10 Esferas de  $r = 0,001m$  con una masa promedio de 0,04877 g
- 2 Jeringas
- 10 Capilares
- Instalación experimental de un canal vertical de 0,30 m de altura
- Instalación experimental de un canal vertical de 1,5 m de altura
- 1 Compresor

- Agujas para el suministro del gas de 1; 0,8 y 0,5 mm de diámetro
- 1 Balón de almacenamiento de aire de 0,6 kgf/cm<sup>2</sup>.
- Válvulas de regulación
- 1 Manómetro
- 1 Computadora personal con microprocesador Intel Core 2-Duo 7800.

Ambas instalaciones se desarrollaron y construyeron para poder estudiar las características del flujo bifásico en burbujeo, glicerina y gel industrial, con aire. El empleo de una segunda instalación con un canal de mayor altura fue necesario para visualizar la unión de las burbujas bajas velocidades.

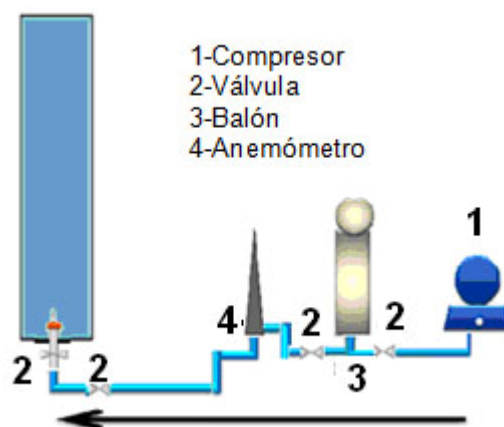
Se diseñó un experimento con una muestra de tamaño 18 correspondiente a 18 observaciones experimentales con la intención de ajustar un modelo de regresión por mínimos cuadrados para estimar los coeficientes de arrastre conociendo el valor del número de Reynolds. Los estudios experimentales realizados fueron acompañados de la visualización del flujo para todas las condiciones hidrodinámicas que se plantean:

- Diámetro de entrada de 0,5 mm, altura del canal de 0,3 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,8 mm, altura del canal de 0,3 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 1 mm, altura del canal de 0,3 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,5 mm, altura del canal de 1,5 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,8 mm, altura del canal de 1,5 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 1 mm, altura del canal de 1,5 m y gel industrial como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,5 mm, altura del canal de 0,3 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,8 mm, altura del canal de 0,3 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 1 mm, altura del canal de 0,3 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,5 mm, altura del canal de 1,5 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 0,8 mm, altura del canal de 1,5 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.
- Diámetro de entrada de 1 mm, altura del canal de 1,5 m y Glicerina 80 % como sustancia de trabajo.

La etapa experimental permitió determinar los parámetros de interés de la columna de burbujeo bifásica

- Distancia entre burbujas.
- Diámetro de las burbujas.
- Velocidad de ascenso de las burbujas.
- Número de burbujas en la cadena.
- Altura de la columna líquida.
- Frecuencia de burbujeo.
- Altura de aproximación.

Ambas instalaciones experimentales están constituidas por un canal vertical principal y un sistema de suministro de aire, que permite la entrada de este con distintas velocidades, lo que facilita obtener diferentes diámetros de burbujas (ver Fig. 1).



**Fig. 1.** Representación del proceso en la instalación

Estos parámetros permiten identificar la estructura de flujo bifásico así como su régimen de flujo ( $Re$ ,  $We$ ,  $Eo$ ).

Para la realización de la etapa de pruebas, una vez determinada la altura del líquido, el nivel se mantuvo constante, lo que garantizó una columna hidráulica constante. Una vez culminada esta etapa se pasó a la realización de los experimentos.

Los datos anteriormente expuestos fueron obtenidos con ayuda de una cámara digital. El registro de los datos fue realizado para las diferentes combinaciones del canal de entrada de aire.

Para describir el flujo objeto de estudio se aplicaron los criterios generales de la mecánica de los fluidos: las ecuaciones constitutivas sobre volúmenes de control finitos se resuelven en forma unidimensional y en estado permanente o transitorio (como aproximación al modelo que se asume).

### **Simulación en dinámica computacional de los fluidos**

En el campo del estudio del comportamiento de los fluidos se ha evidenciado un gran avance por la incorporación de la Dinámica de Fluidos Computacional (DFC) perteneciente a la simulación numérica, al análisis de los sistemas incluyendo los fenómenos y procesos asociados [15]. Con el DFC apoyado por el desarrollo de la tecnología computacional y el aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores se gana en tiempo, posibilita la variación del sistema, geometría y parámetros, además los costes son considerablemente menores que los de la realización de excesivas repeticiones experimentales.

Para el análisis de los fluidos se emplean los volúmenes de control que consisten en aquellos volúmenes cuyas características satisfacen las leyes básicas y secundarias de la mecánica de los fluidos. La cantidad e identidad de la materia en su interior puede variar en el tiempo [16]. Los volúmenes de control son empleados con las ecuaciones constitutivas para modelar los flujos bifásicos en estado estático y dinámico, con esquemas numéricos, que avanzan tramo a tramo en la dirección del flujo o basados en la corrección de presiones. Se resuelven las ecuaciones constitutivas como la de Navier-Stokes para flujos incompresibles newtonianos continuos, aunque estas están implícitas en los sistemas de cálculo de los programas de desarrollo de DFC.

### **Modelo propuesto para la simulación**

En este trabajo se realizó el estudio del sistema compuesto por burbujas inmersas de aire como fase dispersa en Gel industrial. La simulación se realizó para una entrada de aire ubicada en la parte inferior del canal con un diámetro del canal de inyección de 0,8 mm y una velocidad de inyección de 0,036 m/s. El flujo que se analizó fue laminar. Todas las simulaciones se realizaron a 300 K y se tomó como referencia la presión atmosférica. El software empleado fue el *ANSYS Fluent 14.0*.

### **Modelos y condiciones de frontera**

Para la modelación se empleó una formulación en régimen transiente y para la representación del flujo multifásico se escogió el modelo Volumen de Fluido (MVF) que es uno de los modelos eulerianos, el cual es conveniente para columnas de burbujas. En el modelo basado en la formulación euleriana-euleriana para la simulación de flujos dispersos [17], se resuelven ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y cantidad de movimiento en la fase dispersa. El modelo de MVF, se centra en la interfase de los componentes del sistema y esta se modela utilizando volúmenes finitos para solucionar numéricamente el modelo. Está diseñado para dos o más fluidos inmiscibles donde la posición de la interfase entre los fluidos es de interés. En el MVF se utiliza un solo conjunto de ecuaciones de momento para ambos fluidos y la fracción de volumen de cada uno de los mismos, en cada célula computacional, es seguida por todo el dominio. Por estas razones resulta conveniente esta formulación para el caso del movimiento de burbujas sumergidas en fluidos [15].

Las condiciones de fronteras impuestas al dominio fueron:

- 1- En las paredes se impone la condición de no deslizamiento (velocidad cero).
- 2- La entrada de aire al sistema es con velocidad constante, cuyo valor se corresponde con el descrito anteriormente y a la salida solo se le impone la condición de presión constante atmosférica 101325 Pa.
- 3- Volumen de control de 26 cm de altura por 5 cm ancho.
- 4- El canal de entrada fue representado por una prolongación de 1 x 0,08 cm.
- 5- La malla creada contiene 29000 elementos con forma de cuadrilátero y 29399 nodos.

### **Resultados**

A continuación se muestran los resultados y la discusión de los mismos, tomando en cuenta las particularidades que presenta la hidrodinámica de la fase dispersa para  $0 < Re < 15$ .

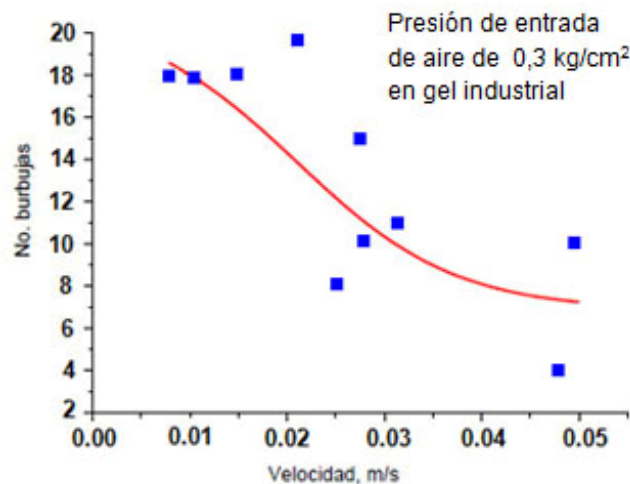
Para lograr establecer el comportamiento de la velocidad de ascenso de las burbujas con cierta certeza, apoyados en la información colectada de los experimentos realizados, se emplearon diversas relaciones de este parámetro con otros:

- Variación del número de burbujas en la cadena con respecto a la velocidad de ascenso de la burbuja.

- Variación de la relación existente entre el diámetro y la distancia entre burbujas con respecto a la velocidad.
- Variación de la velocidad con respecto a la frecuencia de burbujeo.
- Variación del número de burbujas en la cadena con respecto a la velocidad de ascenso de la burbuja

Considerando la cadena como las burbujas que se encuentran por debajo de la altura de aproximación, que será diferente para cada variante experimental, se establece la relación que existe entre la velocidad y el número de burbujas presentes en la cadena (ver Fig. 2).

Del gráfico mostrado en la figura 2 se observa que la tendencia del número de burbujas en la cadena es a aumentar con el decremento de la velocidad, debido a que las burbujas demoran más en recorrer el canal de trabajo y coinciden en un mayor número en el mismo.



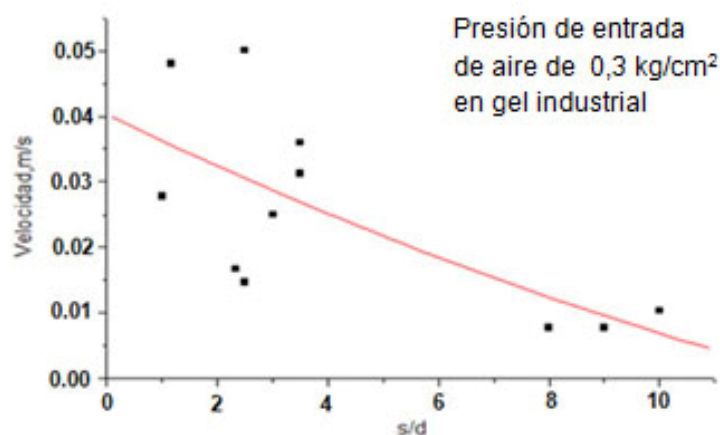
**Fig. 2.** Variación del número de burbujas en la cadena respecto a la velocidad de ascenso

#### Variación de la relación existente entre el diámetro y la distancia entre burbujas con respecto a la velocidad

La introducción de la relación de adimensional  $s/d$ , para  $s$  distancia entre burbujas y  $d$  diámetro de las burbujas, permite analizar el comportamiento de la velocidad en relación a las dimensiones de las burbujas en función de la distancia entre sus centros.

En el gráfico mostrado en la figura 3 se observa la proporcionalidad inversa que existe entre la velocidad y la relación  $s/d$ , evidenciando lo siguiente:

- El incremento de la velocidad con el aumento del diámetro de la burbuja y el volumen que esta ocupa en el canal.
- El aumento de la distancia entre burbujas como medida del decremento de la velocidad, lo que es similar a la disminución del diámetro de la misma. Para pequeñas distancias entre burbujas hay mayor interacción entre estas facilitando la atracción por parte de la precedente y aumentando la velocidad ya que tras esta se forma una estela que para bajos valores de  $Re$ , el fenómeno que en ella ocurre se denomina Calle de vorticidad de Kármán [18].

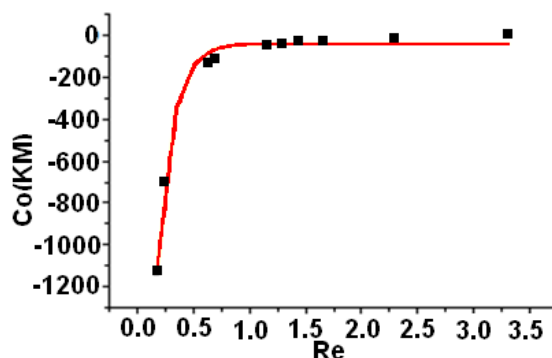


**Fig. 3.** Variación de la relación existente entre el diámetro y la distancia entre burbuja con respecto a la velocidad de ascenso

## Coefficientes de arrastre

Para el rango de valores de  $Re$  obtenidos a partir de la información recopilada en los experimentos,  $0 < Re \leq 15$ , los valores de los coeficientes de arrastre no pueden ser calculados mediante los modelos KM (con y sin corrección viscosa), ni las formulaciones que indica la bibliografía, ya que están definidos para  $50 < Re < 200$  [19].

En el gráfico de la figura 4 queda corroborada la afirmación anteriormente planteada de la disfuncionalidad del modelo KM formulado como aparece en la bibliografía, para el rango de  $Re$  con que se trabaja en esta investigación debido a la tendencia de obtención de valores negativos del coeficiente de arrastre para una burbuja aislada  $Co$ .



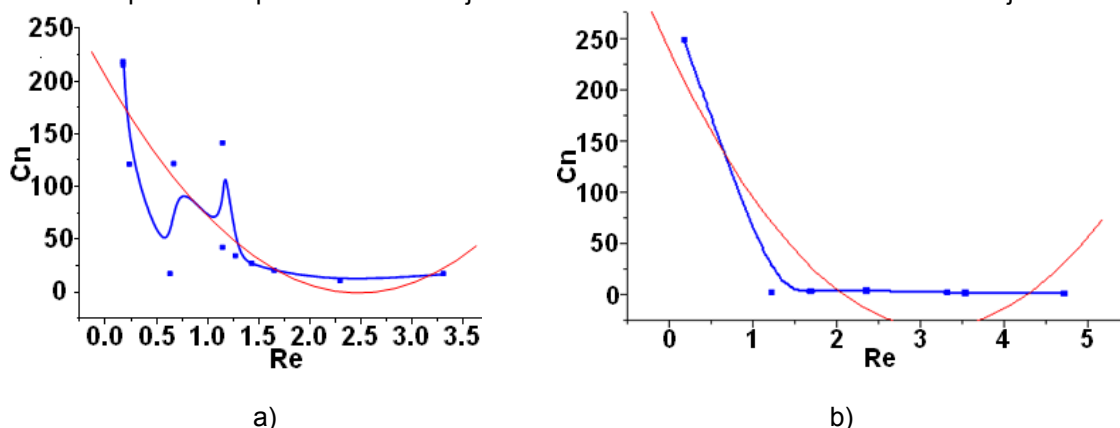
**Fig. 4.** Relación entre  $Re$  y el coeficiente de arrastre de la burbuja aislada mediante  $Re$ , por el modelo KM, en gel industrial

En un intento de perfeccionar el modelo de forma que permita encontrar los coeficientes de arrastre para el rango de trabajo, se encontró la relación entre los valores de  $Re$  y los de  $Co$  calculados a partir de la ecuación de velocidad de la burbuja aislada empleando las velocidades de ascenso medidas experimentalmente. El ascenso de la burbuja se rige por el balance de fuerzas como se muestra en la ecuación 2.

$$F_{\text{empuje}} - F_{\text{peso}} = F_{\text{arrastre}} \quad (2)$$

Para el caso del movimiento de una burbuja esférica a bajos  $Re$  ( $Re \leq 1$ ), algunos consideran solo la fuerza de Arquímedes y la de gravedad. Sin embargo, queda demostrado que para pequeños valores de  $Re$  ( $Re < 1$ ) actúan también las fuerzas de arrastre, provocando una disminución en la velocidad de ascenso en las burbujas.

Para mejor comprensión del comportamiento de esta variable se grafican los resultados en las figuras 5a y 5b donde aparecen representados los ajustes realizados a ambas curvas con color rojo.

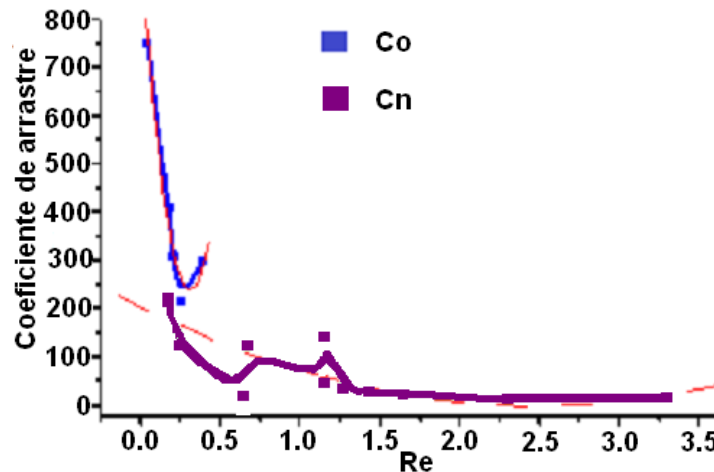


**Fig. 5.** Relación entre  $Re$  y el coeficiente de arrastre para un fluido perturbado por  $n-1$  burbujas precedentes en: a) gel industrial, b) glicerina 80 %

De los gráficos mostrados en las figuras 5a y 5b se observa que todas las curvas tienen la misma tendencia respecto a  $Re$ . Un resultado importante obtenido es la notable diferencia entre los coeficientes de arrastre para la burbuja aislada y para el tren de burbujas. Como se puede observar de la figura 8, en la burbuja aislada los valores del coeficiente de arrastre son mucho mayores, lo que indica que la resistencia al movimiento de la burbuja es mayor. O sea, en el tren de burbujas cada una de ellas se encuentra a la sombra de la precedente, lo que es lo mismo, en la zona de influencia de la estela por lo que por ser una zona de una viscosidad menor se reduce el coeficiente de arrastre.

## Discusión de la modelación

En el proceso de burbujeo en una columna vertical bifásica se produce el fenómeno de arrastre producido por la estela de la burbuja precedente [20], creando entre ambas burbujas una región de relativa turbulencia y menor viscosidad [21]. Los modelos teóricos recomendados por la bibliografía consultada para la evaluación de los coeficientes de arrastre en un flujo bifásico no son aplicables en el rango de valores de Reynolds que se usan en el trabajo ( $0 < Re < 15$ ), por lo que con este estudio se obtuvo un modelo teórico-experimental capaz de evaluar los coeficientes de arrastre para este rango de trabajo.



**Fig. 6.** Comparación entre los valores del coeficiente de arrastre para una burbuja aislada y para un tren de burbujas respecto a  $Re$  en gel industrial

Se ajustaron modelo de primer y segundo orden resultando más pertinente el modelo cuadrático. Finalmente se empleó el cuadrático y modelo obtenido es el siguiente: (ver ecuación 3 y 4)

$$C_n = 9941 + 0.004C_o \quad (3)$$

$$C_n = 21,3729 \cdot R_e^2 - 137,8590 \cdot R_e + 199,7267 \quad (4)$$

El análisis que confirma la calidad del modelo ajustado se fundamenta en los siguientes indicadores:

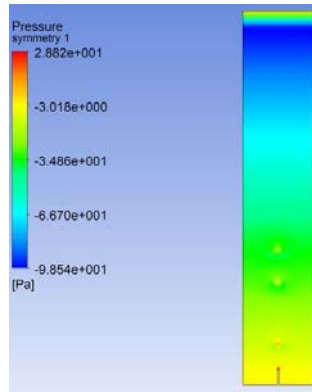
- Coeficiente de correlación  $r \approx 0,81$ .
- Estadístico  $R^2 \approx 66,8 \%$ , el cual indica que el modelo ajustado explica el 66,8 % de la variabilidad en los resultados del coeficiente de arrastre.
- El error estándar de la estimación indica que la desviación estándar de los residuos es aproximadamente 47,65.
- El modelo polinomial que mejor se ajusta a los resultados experimentales es el de segundo orden, que resultó estadísticamente significativo con un 99 % de nivel de confianza.

Para verificar el cumplimiento de los requisitos de aplicación del método de regresión utilizado se realizó el análisis de los residuos, aplicando la prueba estadística de Durbin-Watson, obteniéndose que no hay evidencias de que los residuos estén correlacionados con el orden de obtención de los datos, es decir, del orden que fueron realizados los experimentos, con un nivel de confianza superior al 95 % al realizar esta afirmación.

Como verificación del modelo se realiza una simulación computacional con el software *Ansys*. Siguiendo las condiciones anteriormente mencionadas, se logra simular el movimiento de 3 burbujas en una columna vertical de líquido de Gel industrial. Para visualizar el comportamiento de las burbujas fue necesario un gráfico de contornos que simboliza la fracción volumétrica de las fases en el dominio mostrado en la figura 7, donde se observa la formación y ascenso.

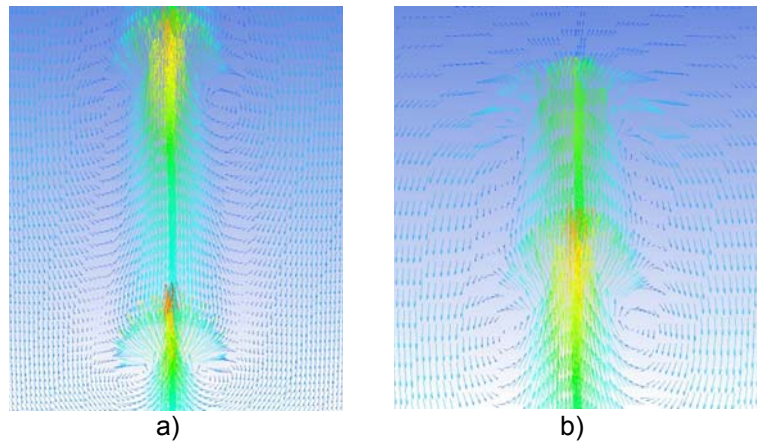
En el gráfico de contornos de presión se representa la caída de presión en la columna (ver Fig. 7), donde se muestra que las mayores presiones están en las burbujas que van saliendo y que van disminuyendo a medida que estas ascienden en la columna, corroborando la influencia que tiene la altura del canal en el comportamiento de las mismas.





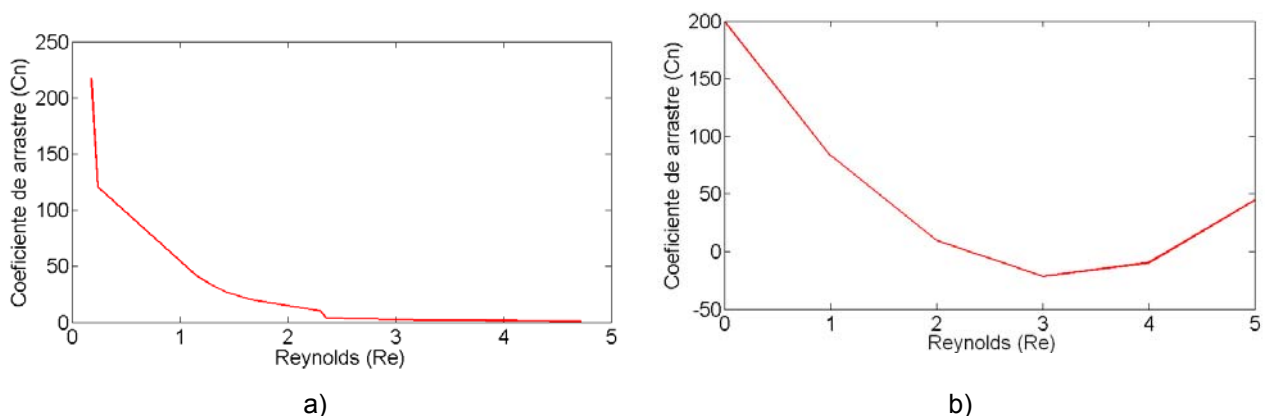
**Fig. 7.** Gráfico de contornos de presión

A través de la representación de los vectores de velocidad de la mezcla se observa el fenómeno de la estela entre dos burbujas alejadas entre sí (ver Fig. 8a) y dos separadas por una menor distancia (ver Fig. 8b).



**Fig. 8.** Vectores de velocidad de la mezcla; a) Burbujas alejadas, b) Burbujas cercanas

En la figura 9 se observa la influencia que sobre la burbuja trasera tiene la estela producida por la anterior.



**Fig. 9.** Relación entre  $C_n$  y  $Re$  para los valores a) Obtenido Experimentalmente, b) Generado por el polinomio obtenido por mínimos cuadrados

Comparando la figura 8a con la figura 8b se observa que cuando la  $s$  es menor, el efecto de la estela aumenta provocando un incremento notable de la velocidad de la mezcla y un decremento de la diferencia de presiones entre burbujas, corroborando lo observado en el movimiento de las burbujas en la instalación experimental.

Para validar el modelo emplearemos la comparación de datos y validación respecto al propósito.

### Comparación de Datos

Usando el *Matlab* 2013 se genera a partir del modelo para valores de Reynolds entre 0 y 5 con un paso de 0,5 los valores de los coeficientes de arrastre en un tren de burbujas (ver Fig. 9), con el objetivo de comparar los valores que proporciona el modelo con los datos experimentales.

El problema por el cual se plantea obtener un modelo teórico-experimental capaz de evaluar los coeficientes de arrastre para valores de  $0 < Re < 15$ , queda resuelto, pues el modelo obtenido es capaz de cumplir con el objetivo propuesto con una buena aproximación.

### Conclusiones

Los modelos teóricos recomendados por la bibliografía consultada no son aplicables para el rango de valores de Reynolds estudiado ( $0 < Re < 15$ ) proponiéndose un modelo teórico-experimental capaz de evaluar los coeficientes de arrastre en este rango de trabajo.

Se diseñaron y construyeron instalaciones experimentales para la determinación de las propiedades hidrodinámicas de los fluidos y para la determinación, mediante un procedimiento establecido, de las características del flujo bifásico en burbujeo (glicerina 80 %, gel industrial). Se puede visualizar que el comportamiento de ambas curvas es similar, corroborando que los valores generados por el modelo propuesto son bastante próximos a los obtenidos experimentalmente.

Los resultados de la investigación realizada en un flujo bifásico gas-líquido, para las configuraciones experimentales en que se realizó el estudio comprobaron que los parámetros que caracterizan su comportamiento (diámetro, velocidad de ascenso, número en la cadena y distancia entre burbujas, así como la altura de la columna líquida, frecuencia de burbujeo y altura de aproximación) no se pueden analizar individualmente pues existe una interrelación entre ellos.

La viscosidad de la fase continua tiene una influencia significativa sobre el comportamiento de la fase dispersa y este comportamiento varía en función de cómo se presenta una burbuja aislada o un tren de burbujas.

La estela creada por la burbuja precedente provoca un decremento de la viscosidad del fluido en fase continua, del gradiente de presión y un aumento en la velocidad de la burbuja posterior, resultando ser el factor fundamental que incide en la variación de las fuerzas de arrastre en la fase dispersa del flujo bifásico líquido-gas.

### Referencias

1. García F, Haoulo M. Estudio Experimental de Patrones de Flujo Bifásico Aire-Agua en Tuberías Horizontales y Ligeramente Inclinadas. *Información Tecnológica*. 2009;20(3):3-12. ISSN 0718-0764.
2. Mandhane, J, Gregory G, Aziz K. A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes. *International Journal of Multiphase Flow*. 1974;1(4):537-53. ISSN 1743-3533.
3. Mukherjee H, Brill J. Pressure drop correlations for inclined two-phase flow. *Journal of energy resources technology*. 1985;107(4):549-54. ISSN 0195-0738.
4. Xiao J, Shoham O, Brill J. A comprehensive mechanistic model for two-phase flow in pipelines: University of Tulsa; 1990.
5. Doron P, Granica D, Barnea D. Slurry flow in horizontal pipes—experimental and modeling. *International Journal of Multiphase Flow*. 1987;13(4):535-47. ISSN 0301-9322.
6. Taitel Y, Dukler A. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal*. 1976;22(1):47-55. ISSN 1547-5905.
7. Ruzicka MC. On bubbles rising in line. *International Journal of Multiphase Flow*. 2000;26(11):1141-1181. ISSN 0301-9322.
8. Chen R, Dong PF, Xu J, et al. Controllable microfluidic production of gas-in-oil-in-water emulsions for hollow microspheres with thin polymer shells. *Lab on a Chip*. 2012;12(20):3858-60. ISSN 1473-0197.
9. Baz Rodríguez S, Ramírez Muñoz J, Soria A, et al. Hydrodynamic Interaction of Two Spherical Bubbles Rising In-Line: A Semi-Analytical Approach. *Chemical Engineering Communications*. 2014;201(5):674-87. ISSN 0098-6445.
10. Baz Rodríguez S, Ramírez Muñoz J, Soria A. In-line interaction between two spherical particles due to a laminar wake effect. *International Journal of Multiphase Flow*. 2012;39:240-4. ISSN 0301-9322.

11. Ruzicka MC. On stability of a bubble column. *Chemical Engineering Research and Design*. 2013;91(2):191-203. ISSN 0263-8762.
12. Ortiz León G, Araya Luna D, Vílchez M. Revisión de modelos teóricos de la dinámica de fluidos asociada al flujo de sangre. *Tecnología en Marcha*. 2013;27(1):66-76. ISSN 2215-2504.
13. Ando K, Colonius T, Brennen CE. Numerical simulation of shock propagation in a polydisperse bubbly liquid. *International Journal of Multiphase Flow*. 201;37(6):596-608. ISSN 0301-9322.
14. Taneda S. Instability waves in the shear layer over a separation bubble. *Fluid Dynamics Research*. 2000;27(5):335-51. ISSN 0169-5983.
15. Kaleeswaran B, Aravind S, Ganesh B, et al. Computational Flow Analysis of Para-rec Bluff Body at Various Reynold's Number. *International Journal of Engineering*. 2013;6(5):667-74. ISSN 0974-3154.
16. Slam S, Bano Z, Siddique I, et al. The optimal solution for the flow of a fourth-grade fluid with partial slip. *Computers & Mathematics with Applications*. 2011;61(6):1507-16. ISSN 0898-1221.
17. Alexiadis A, Dudukovic MP, Ramachandran P, et al. Liquid–gas flow patterns in a narrow electrochemical channel. *Chemical Engineering Science*. 2011;66(10):2252-60. ISSN 0009-2509.
18. Mataix C. *Mecánica de los Fluidos y Maquinas Hidráulicas*: Alfaomega-Oxford; 2005. ISBN 8421901753.
19. Gómez Díaz D, Gomes N, Teixeira JA, et al. Gas–liquid interfacial area in the oxygen absorption to oil-in-water emulsions in an airlift reactor. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2010;88(4):561-4. ISSN 1939-019X.
20. García Abuín A, Gómez Díaz D, Losada M, et al. Bubble column gas–liquid interfacial area in a polymer+surfactant+water system. *Chemical Engineering Science*. 2012;75:334-41. ISSN 0009-2509.