

# Simulación de tratamiento térmico por diferencias finitas

V. Pérez Felipe\*, L. Goyos Pérez\*, L. Martínez Fonte\*\*

\* Departamento de Tecnología de Construcción de Maquinaria

\*\* Centro de Bioingeniería

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana 19390, Cuba.

E-mail: [mecanica@cujae.ispjae.edu.cu](mailto:mecanica@cujae.ispjae.edu.cu)

## Resumen

El objetivo del presente trabajo es modelar la etapa de enfriamiento durante un tratamiento térmico en agua y aire de piezas cilíndricas. Se implementó con el método de diferencias finitas en dos dimensiones, obteniéndose un programa por computadora que ofrece de manera gráfica la temperatura en diversos lugares de la pieza, en el tiempo.

## 1. Introducción

El presente trabajo es la continuación de una investigación anterior, donde se modelaba el enfriamiento de piezas cilíndricas por el método de las diferencias finitas en una dimensión [4]. Se decidió acometer ambos trabajos por la necesidad de dar tratamiento térmico a piezas de grandes dimensiones, para obtener hierro austemperizado, y por solo contarse con agua y aire como medios de enfriamiento. La realización de ensayos experimentales para determinar la tecnología de enfriamiento de estas piezas, conllevaría un gasto considerable de energía térmica, así como de material, mano de obra y equipos auxiliares.

Entre los métodos numéricos más comunes podemos citar los métodos de diferencias finitas, elementos finitos e integral de contorno. Siendo el primero de éstos el más popular por las facilidades que presenta durante su deducción. Para aplicar el método de Diferencias Finitas existen muchas variantes, siendo muy popular entre los ingenieros, construir la ecuación de diferencias aplicando el principio de conservación de la energía a un elemento de volumen alrededor de un nodo de la red.

Existen muchos programas por computadora que simulan procesos de transferencia de calor, dentro de los cuales podemos citar: *SINDA*, *MITAS*, *PHOENICS*. Pero no están directamente enfocados para resolver problemas de tratamiento térmico; y al no contar en muchos casos con los mismos, los autores se propusieron la elaboración de programas para modelar tratamientos térmicos, con el objetivo de obtener la tecnología de enfriamiento sin tener que recurrir a ensayos prácticos, utilizando el método de las diferencias finitas.

En aras de simplificar el análisis y garantizar la confiabilidad de los resultados, fue seleccionada como forma geométrica a modelar la de una pieza cilíndrica, y como medios de enfriamiento el agua y el aire, ya que se contaba con ecuaciones para modelar los procesos de enfriamiento de la frontera del cilindro con gran exactitud.

## 2. Análisis del proceso de transferencia de calor dentro de la pieza y realización efectiva del método de diferencias finitas

La transferencia de calor en el interior del cilindro se lleva a cabo por conducción, y para obtener un modelo por diferencias finitas en dos dimensiones es necesario:

Discretizar la pieza en pequeños elementos de volumen.

Aplicar la ley de FOURIER para la conducción (1) y el principio de conservación de la energía.

$$\Delta Q = -\lambda A \delta T / \delta r \quad (1)$$

donde :

$\lambda$  : Conductividad térmica [W/m]

$A$  : Área de la superficie isoterma [m<sup>2</sup>]

$\delta T / \delta r$  : Gradiente de temperatura [°C/m]

$\Delta Q$  : Flujo de Calor [W]

Se discretizó la pieza, como se puede observar en la Fig. 1 y en la Fig. 2, en una red de puntos equidistantes en el sentido radial y longitudinal, para analizar físicamente la conducción del calor.

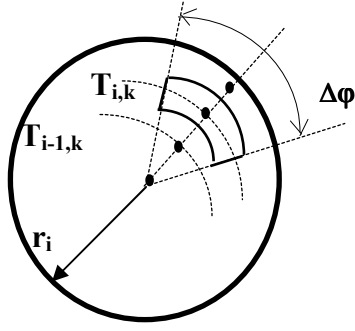


Fig. 1 Cilindro discretizado.

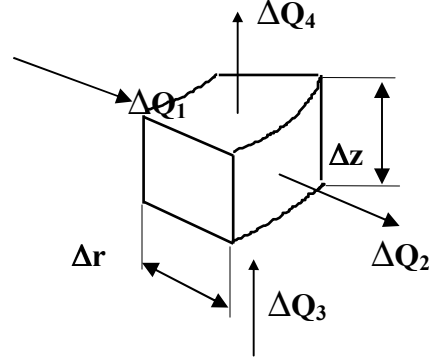


Fig. 2 Elemento diferencial de volumen.

Una vez dividida la pieza en una red de puntos equidistantes, denominados nodos, se selecciona uno que se encuentre en el interior del cilindro para obtener un modelo matemático que permita simular el proceso de transferencia de calor.

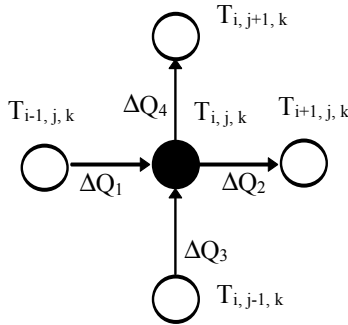


Fig. 3 Nodos en el interior de la pieza.

Como el flujo de calor a través de un nodo depende de la temperatura de los adyacentes nos auxiliaremos de la Fig. 3 para realizar el análisis. En la Fig. 3 podemos apreciar que cada nodo tiene una nomenclatura que lo identifica, por ejemplo: el nodo objeto de análisis tiene una temperatura  $T$  en el instante de tiempo  $k$  y se encuentra en la posición  $(i, j)$ . El flujo de calor que pasa del nodo de temperatura  $T$ , en el instante de tiempo  $k$  y posición  $(i-1, j)$  al nodo central se denomina  $\Delta Q_1$ . Si hacemos este razonamiento para el resto de los nodos comprobaremos que tenemos otros flujos caloríferos que van a ser  $\Delta Q_2, \Delta Q_3, \Delta Q_4$ . Al aplicar la ley de FOURIER para obtener una expresión matemática que caracterice el flujo de calor por conducción y sustituyendo las derivadas por variaciones o diferencias, ya sean de temperatura o de posición obtendremos las siguientes expresiones:

$$\Delta Q_1 = -\lambda(T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})(r_i - \frac{\Delta r}{2})\Delta z \frac{\Delta \phi}{\Delta r} \quad (2)$$

$$\Delta Q_2 = -\lambda(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k})(r_i - \frac{\Delta r}{2})\Delta z \frac{\Delta \phi}{\Delta r} \quad (3)$$

$$\Delta Q_3 = -\lambda(T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1})\Delta r r_i \frac{\Delta \phi}{\Delta r} \quad (4)$$

$$\Delta Q_4 = -\lambda(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k})\Delta r r_i \frac{\Delta \phi}{\Delta r} \quad (5)$$

Al pasar el calor a través del nodo central, como estamos en presencia de un régimen transitorio la energía interna va cambiar constantemente a medida que transcurra el tiempo:

$$\Delta U = \rho c V \frac{\Delta T}{\Delta \tau}$$

Y al aplicar el principio de sustituir las derivadas por variaciones finitas llegaremos a la siguiente expresión de variación de energía interna :

$$\Delta U = \frac{\rho c}{\Delta \tau} r_i \Delta \phi \Delta z \Delta r (T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}) \quad (6)$$

donde:

$\rho$	Densidad del medio (agua o aire) [kg/m <sup>3</sup> ]
$c$	Calor específico [J/(kgK)]
$V$	Volumen del elemento de volumen analizado [m <sup>3</sup> ]

Hasta el momento se han obtenido las ecuaciones que gobiernan el proceso de conducción dentro del cilindro pero lo que nos interesa es conocer como cambia la temperatura en el tiempo ( $T_{i,j,k+1}$ ). Para ello debemos hacer un balance de energía.

Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 = \Delta U \quad (7)$$

sustituyendo cada uno de los términos de la ecuación anterior y despejando la temperatura del nodo de posición i, j en el instante de tiempo k+1 se obtuvo la siguiente expresión.

$$T_{i,j,k+1} = T_{i-1,j,k} \cdot A_1 + T_{i,j,k} \cdot A_2 - T_{i+1,j,k} \cdot A_3 + T_{i,j-1,k} \cdot A_4 - T_{i,j+1,k} \cdot A_4 \quad (8)$$

donde:

$$A_1 = f_0 - f_0 \Delta r / 2r_i \quad (9)$$

$$A_2 = 1 - f_0 \Delta r / r_i \quad (10)$$

$$A_3 = f_0 + f_0 \Delta r / 2r_i \quad (11)$$

$$A_4 = f_0 \Delta r / \Delta z \quad (12)$$

donde:

$f_0$  es el número de FOURIER;  
 $r_i$  es el radio correspondiente al nodo que se analiza.

Para poder modelar el proceso de cambio de la temperatura en el borde del cilindro es necesario realizar un proceso de deducción similar al ya hecho, con la única diferencia de que el flujo de calor cedido al medio depende del proceso que este ocurriendo en la frontera del cilindro (ebullición, convección, radiación) y por lo tanto es necesario el cálculo del coeficiente de transmisión superficial del calor ( $\alpha$ ) para cada uno de estos.

### 3. Análisis del proceso de transferencia de calor entre la pieza y el agua

Al sumergir la pieza incandescente en el agua se establece inmediatamente el proceso de *ebullición*, que en esta primera etapa se llama ebullición pelicular porque se forma alrededor de la pieza una capa de vapor sobrecalentado que separa totalmente la pieza del agua [1, 2, 3].

Cuando la temperatura de la superficie alcanza cierto valor, se rompe la camisa de vapor y el líquido comienza a hervir en la superficie de la pieza, el enfriamiento es mucho mas rápido en este régimen (denominado régimen de ebullición con formación de burbujas) [1, 2].

Cuando la temperatura del metal es inferior a la ebullición del líquido (para el agua a presión atmosférica son 100°C), el agua deja de hervir y el enfriamiento será mas lento. En esta última etapa solo ocurre convección.

El paso del régimen de ebullición pelicular al de ebullición con formación de burbujas, se realiza en un régimen intermedio llamado régimen transitorio. Este régimen se caracteriza por el hecho de que la capa de vapor permite que el líquido llegue a tocar la pared cada vez en mayor número de puntos, y mayores áreas transformándose de esta forma en grandes burbujas de vapor.

### Métodos de Cálculo

#### **Convección:**

Como vimos anteriormente, el proceso de convección ocurre cuando la pieza permanece en el aire o cuando permanece en el agua y su temperatura es menor que la de saturación.

La regularidad de la emisión calorífera para cilindros horizontales de diámetro  $d$  cuando  $10^3 < Gr_{dfl} Pr_{fl} < 10^8$ , tiene la forma [3]:

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0.50(Gr_{dfl} Pr_{fl})^{0.25} (Pr_{fl} / Pr_p)^{0.25} \quad (13)$$

y la regularidad de la emisión calorífera media para cilindros verticales es [2, 3]:

a) cuando  $10^3 < Gr_{dfl} Pr_{fl} < 10^9$  (régimen laminar)

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0.76(Gr_{dfl} Pr_{fl})^{0.25} (Pr_{fl} / Pr_p)^{0.25} \quad (14)$$

b) cuando  $Gr_{dfl} Pr_{fl} > 10^9$

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0.15(Gr_{dfl} Pr_{fl})^{0.33} (Pr_{fl} / Pr_p)^{0.25} \quad (15)$$

#### **Emisión calorífera durante el flujo currentilíneo transversal alrededor de un cilindro (convección forzada):**

Como resultado del análisis y generalización de los datos experimentales existentes, para calcular el coeficiente medio de transmisión del calor por el perímetro del cilindro pueden recomendarse:

Cuando  $Re < 10^3$  [3]:

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0.56(Re_{dfl})^{0.5} (Pr_{fl})^{0.36} (Pr_{fl} / Pr_p)^{0.25} \quad (16)$$

Cuando  $Re > 10^3$ :

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0.28(Re_{dfl})^{0.6} (Pr_{fl})^{0.36} (Pr_{fl} / Pr_p)^{0.25} \quad (17)$$

#### **Radiación:**

En los procesos de transferencia de calor es común encontrar los mecanismos de radiación y convección ocurriendo simultáneamente. Así tendremos al definir un coeficiente total para estos procesos simultáneos, basándonos en la resistencia total a la transferencia de calor, que nos quedará como:

$$\bar{\alpha}^{4/3} = \bar{\alpha}_{conv}^{4/3} + \bar{\alpha}_{rad} \bar{\alpha}^{1/3} \quad (18)$$

Si  $\bar{\alpha}_{rad} < \bar{\alpha}_{conv}$  se usa la ecuación:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{conv} + \frac{3}{4} \bar{\alpha}_{rad} \quad (19)$$

El coeficiente efectivo de radiación  $\bar{\alpha}_{rad}$  se calcula aproximadamente con la siguiente ecuación:

$$\bar{\alpha}_{rad} = \frac{\epsilon \sigma (T_s^4 - T_{sat}^4)}{T_s - T_{sat}} \quad (20)$$

donde:

$\epsilon$  es la emisividad del sólido;

$\sigma$  es la constante de STEPHAN-BOLTZMAN.

### Ebullición:

El campo de la emisión calorífera durante la ebullición pelicular en condiciones de movimiento libre (en un gran volumen) para un cilindro horizontal, se realiza según la fórmula:

$$\alpha = 0.62 \sqrt[4]{\frac{(\lambda'')^3 (\rho' - \rho'') g r^*}{\nu'' d (T_p - T_f)}} \quad (21)$$

donde:

$$r^* = r + 0.5 c_p'' (T_p - T_f)$$

$r^*$  es el diámetro del cilindro [m]

$g$  es la aceleración de la gravedad [9.8 m/s<sup>2</sup>]

$r$  es el calor de cambio de fase [J/kg]

$\lambda''$  es la conductividad del vapor [W/m°C]

$\rho'$  es la densidad del agua en fase líquida [kg/m<sup>3</sup>]

$\rho''$  es la densidad del vapor de agua [kg/m<sup>3</sup>]

$\nu''$  es la viscosidad cinemática del vapor de agua [m<sup>2</sup>/s]

$c_p''$  es el calor específico a presión constante del vapor [J/kg°C]

Todas estas propiedades del vapor se eligen a la temperatura media del mismo:

$$T_m = 0.5(T_p + T_s) \quad (22)$$

donde:

$T_s$  es la temperatura de saturación de agua; para la presión atmosférica este valor es de 100 oC.

Para cilindros verticales se emplea la fórmula :

$$\alpha = 0.25 \sqrt[3]{\frac{(\lambda'')^2 (\rho' - \rho'') g c_p''}{\nu''}} \quad (23)$$

### Intercambio de calor durante la ebullición con formación de burbujas:

Las fórmulas adimensionales para la ebullición con formación de burbujas para grandes volúmenes de líquido [2, 3], se pueden expresar en función de la carga de temperatura cuando se cumple que  $(l_c(\text{Pr})^{0.33}) > 1.6$  como sigue:

$$\overline{\text{Nu}} = 2.63 \cdot 10^{-3} (l_c (\Delta T))^{1.86} (P_r)^{0.952} \quad (24)$$

en caso contrario :

$$\overline{\text{Nu}} = 3.91 \cdot 10^{-3} l_c \Delta T (\text{Pr})^{0.33} \quad (25)$$

Estas fórmulas se aplican en el intervalo  $0.05 < \overline{\text{Nu}} < 200$ .

Los valores del número complejo ( $l_c$ ) se encuentran en función de la temperatura de saturación del líquido. Para el agua bajo presión atmosférica  $l_c = 1.72$  °C.

## 4. Resultados

A partir de los modelos matemáticos obtenidos se elaboró un conjunto de algoritmos, y con ellos se diseñó un programa de computación que simula el enfriamiento del cilindro en agua y aire. El programa muestra las curvas de enfriamiento de la superficie y el centro en un gráfico de temperatura contra tiempo como podemos apreciar en la Fig. 6.

El programa permite modelar el enfriamiento para cilindros de diferentes dimensiones, así como variar la velocidad del fluido donde se enfría. El campo inicial de temperatura puede considerarse homogéneo o bien el usuario puede introducir el valor de la temperatura de cada punto del cilindro.

Durante la corrida del programa se puede cambiar de medio de enfriamiento para simular este proceso cuando se realiza en dos fluidos simultáneamente. A través de un sistema de ventanas el usuario recibe información sobre la temperatura de la superficie y del centro de la pieza. También es posible observar en la simulación cómo está variando el coeficiente de transmisión superficial del calor durante todo el proceso de enfriamiento.

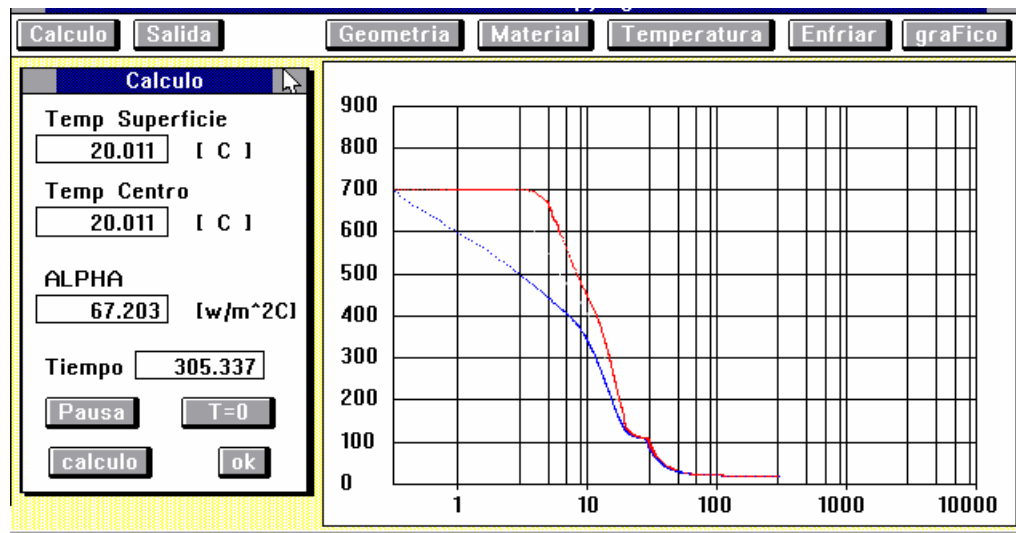


Fig. 6. Salida del programa.

## 5. Discusión de los resultados

Los resultados obtenidos con el programa se compararon con experimentos prácticos, comprobando su confiabilidad. El programa desarrollado permite cambiar el fluido durante el proceso de enfriamiento así como variar la temperatura de éste, facilitando modelar procesos de enfriamiento donde sea necesario calentar el medio e incluso pasar de un fluido a otro. Las dimensiones geométricas del cilindro pueden variarse (diámetro, longitud), y la posición en que es introducido éste en el medio de enfriamiento puede cambiar de horizontal a vertical o viceversa. La información se brinda de manera gráfica y no en forma de tablas, lo cual permite obtener una valoración cualitativa del proceso.

El programa permite ensayar tratamientos térmicos complejos, sin consumo de energía y materiales, facilitando que el tecnólogo tenga una orientación concreta del enfriamiento de la pieza. Por otra parte, este sistema solo permite la simulación de piezas cilíndricas, por lo que en caso de llevarse a piezas reales no cilíndricas, el programa serviría para tener una idea de cómo ocurre el enfriamiento si se pudiera aproximar la misma a dicha configuración.

## 6. Conclusiones

Se obtuvo un programa por computadora que permite modelar el enfriamiento en agua y/o aire de piezas cilíndricas con dimensiones variables. El mismo se puede aplicar en la simulación de tratamientos térmicos de piezas con grandes dimensiones, donde se desee realizar un

tratamiento isotérmico, ya que aprovechando la energía calorífica acumulada en el interior de una pieza es posible mantener una temperatura constante en las capas más externas de la misma, llevando a cabo enfriamientos simultáneos en agua y aire de forma cíclica. Ésta variante es muy útil en la fabricación de hierro nodular austemperizado.

El programa se puede utilizar como medio de enseñanza para que los estudiantes vean diferentes curvas de enfriamiento durante un tratamiento térmico, además se le pueden agregar los diagramas de transformación isotérmica (curvas TTT), para predecir directamente qué estructuras metalográficas se formarán.

## Bibliografía

1. M. A. MIJEEV, I. M. MIJEEVA. *Fundamentos de Termotransferencia*. Mir, Moscú, 1990.
2. A. F. MILLS. *Transferencia de calor*. Irwin, España, 1995.
3. F. C. INCROPERA, D. P. DEWITT. *Introduction to Heat Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. V. PÉREZ FELIPE, R. TEJEIRO RODRÍGUEZ. *Programa simulador de tratamiento térmico*. Tesis de diploma, ISPJAE. La Habana, 1994.
5. S. V. PATANKAR. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington; McGraw-Hill, New York, 1980.

---

## Heat treatment simulation by finite-differences

### **Abstract**

It is modeled the chilling phase during heat treatment of cylindrical bodies in water and air. The finite-differences method in two dimensions was used to develop a computer program that visually shows the temperature in various regions of the body, as a function of time.