

Cálculo de los dientes de engranajes abierto al flujo plástico

J. J. Cabello Eras *, **R. Goytisol Espinosa ***, **J. Moya Rodríguez ****, **E. Alvarez ****.

*Facultad de Mecánica, Universidad de Cienfuegos

Carretera a Rodas, km 2, Cienfuegos, Cuba.

E-mail jcabello@ucf.edu.cu

** Facultad de Mecánica, Universidad Central de las Villas

Villa Clara, Cuba.

(Recibido el 6 de diciembre de 1998, aceptado el 26 de septiembre de 1999)

Resumen

La falla por fluencia friccional del material de los flancos de los dientes es frecuente en engranajes abiertos, mal lubricados y de baja dureza, estando caracterizada por la formación de aletas en la cabeza y los lados de los dientes, y de lomos y canaletas en la zona polar de los dientes.

A pesar de lo antes planteado, en diferentes normas de cálculo de engranajes no se ofrece un método de cálculo para prevenir esta falla, en la que tiene una notable influencia la fricción entre las superficies de los dientes.

En el presente trabajo se realiza un estudio del comportamiento del campo de tensiones en la superficie y en la profundidad de la zona de contacto de los dientes de engranajes que trabajan en un régimen de lubricación límite, con un coeficiente de fricción mayor que 0.1, obteniéndose una ecuación que permite verificar la resistencia al flujo plástico del material cuando el coeficiente de fricción es menor que 0,23.

Palabras claves: Engranajes, flujo plástico, tensiones de contacto.

1. Desarrollo

En [1,3] refiriéndose a la norma ANSI/AGMA Standard 110.04, se plantea. "Flujo plástico: Es una deformación de la superficie de los dientes que resulta de cargas superiores a la carga de deformación permanente del metal en la zona de contacto, y que se

caracteriza por unas aletas en la punta de los dientes o en sus bordes laterales. Este defecto puede ir acompañado ocasionalmente por algún lomo o canaleta en la zona del polo del engranaje".

En [2,4] se plantea que el paso del material del estado elástico al plástico, ocurre cuando la intensidad de las tensiones (σ_i), alcanza el límite de fluencia, como se refleja en la ecuación (1).

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 - 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_f \quad (1)$$

La evaluación del campo de tensiones en las capas próximas a la superficie de los dientes permite esclarecer la ocurrencia del flujo plástico y su carácter particular.

La determinación de las tensiones de contacto en las normas de cálculo de engranajes se realiza a través del modelo de Hertz para el contacto entre dos cilindros paralelos [5,12], cuyo esquema de análisis se muestra en la figura 1.

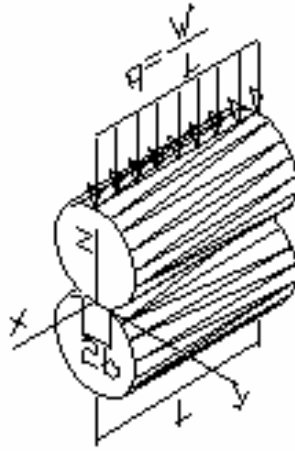
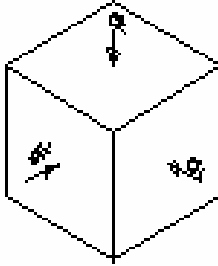


Fig.1 Esquema de análisis para el contacto entre dos cilindros paralelos.

El estado tensional de cualquier punto de la línea de contacto según el modelo de Hertz es de compresión triaxial(Fig.2).

Fig.2 .Estado tensional de cualquier punto de la línea de



contacto según el modelo de Hertz.

Al no existir tensiones tangenciales, entonces σ_x , σ_y , σ_z son tensiones principales y con ellas se determina la intensidad de tensiones que permite evaluar la aparición del flujo plástico. En un plano inclinado a 45 grados con respecto al plano ZX aparecen las tensiones tangenciales máximas que se consideran principales responsables del fenómeno de la picadura. Según las ecuaciones de Hertz [7,11], en la línea de contacto:

$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_H = 0,418 \cdot \sqrt{\frac{W \cdot E'}{R' \cdot L}} \quad (2)$$

Donde:

W-Fuerza normal en N.

L-Longitud de los dientes, mm.

E'-Módulo de elasticidad reducido en MPa.

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2} \right]$$

E_1, E_2 -Módulo de elasticidad de los cilindros en contacto, MPa.

ν_1, ν_2 -Coeficiente de Poisson de los cilindros en contacto.

R' - Radio de curvatura reducido en mm.

$$R' = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

R_1, R_2 - Radio de los cilindros en contacto.

Para cilindros de acero [7]:

$$\sigma_x = 2 \cdot \nu \cdot \sigma_y \quad (3)$$

En la normas de cálculo de engranajes se establecen metodologías para determinar σ_H teniendo en cuenta diferentes factores del trabajo de la transmisión, esta tensión es utilizada para valorar la resistencia a la picadura de la superficie de los dientes y puede servir como punto de partida para la verificación de la resistencia al flujo plástico.

El estado tensional real en la superficie de los dientes de engranajes, difiere del modelo de Hertz, en la presencia de tensiones tangenciales en la superficie como resultado del deslizamiento-rodadura que se produce entre la superficie de los dientes.

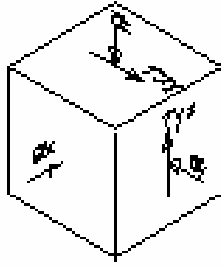


Fig.3.: Estado tensional de cualquier punto de la línea de contacto entre un par de dientes de engranajes.

En engranajes cerrados y bien lubricados, que trabajen en un régimen de lubricación del tipo

elastohidrodinámico, estas tensiones tangenciales no son de gran significación debido al bajo valor del coeficiente de fricción, sin embargo en engranajes abiertos con un régimen de lubricación mixto pueden alcanzar valores de consideración.

Este fenómeno ha sido objeto de estudio de varios autores que han propuesto diferentes ecuaciones para determinar la intensidad de tensiones en estas condiciones.

En [6] se expone la ecuación desarrollada por M.M. Saverin:

$$\sigma_{eq} = \sigma_H \cdot (0,2 + 2,28f - 1,5f^2) \quad (4)$$

Donde:

f – Coeficiente de fricción.

En [13] G.K. Turbin propone:

$$\sigma_{eq} = (0,418 + 0,5428 \left(\frac{0,05}{b}\right)^{1,2546} + f \cdot (0,418 + 0,403 \cdot \left(\frac{0,05}{b}\right)^{0,739})) \sigma_H \quad (5)$$

Donde:

b – Semiancho de la banda de contacto en cm.

En [13] G.K. Turbin también propone otras ecuaciones aplicando la hipótesis de resistencia de las tensiones tangenciales máximas y la de de Huber – Misses que da un criterio más exacto de plasticidad.

Hipótesis de las tensiones tangenciales máximas.

$$\sigma_{eq} = \sigma_H \cdot (0,4 + 0,787f) \quad (6)$$

Hipótesis de Huber – Misses.

$$\sigma_{eq} = \sigma_H \cdot \sqrt{3 \cdot f^2 + 0,16} \quad (7)$$

En la figura 4 se muestra la variación de la intensidad de tensiones en la superficie de los dientes calculada para un mismo engranaje por las ecuaciones de Hertz y por las ecuaciones 4,5,6 y 7.

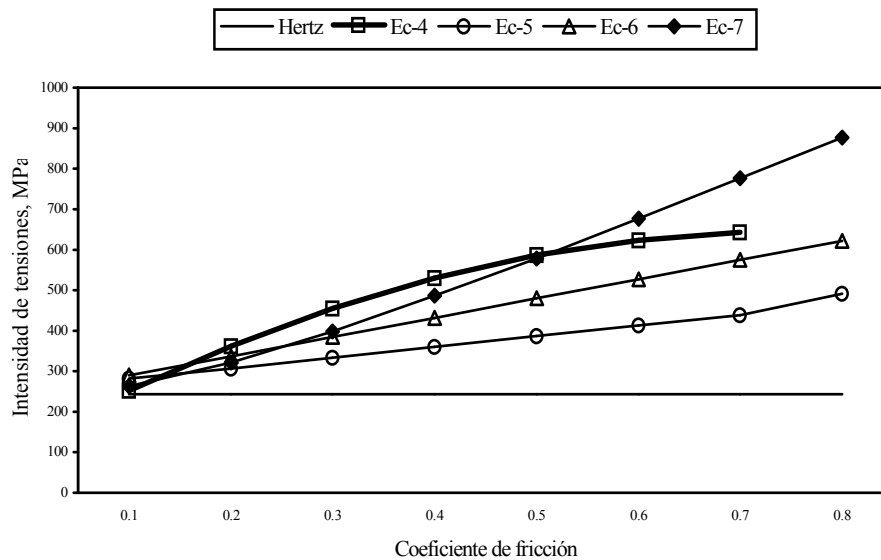


Fig 4. Variación de la intensidad de tensiones en la superficie con el coeficiente de fricción.

En ésta se observa claramente cómo la intensidad de tensiones en la superficie de los dientes calculada por las ecuaciones encontradas en la literatura, con coeficientes de fricción mayor que 0,1 se incrementa considerablemente con respecto a la calculada sin considerar la fricción.

Con estos resultados se demuestra también la importancia de una buena lubricación para evitar esta falla, pues si se logra trabajar en un régimen de lubricación con un bajo coeficiente de fricción el efecto de la fricción se puede minimizar.

En [8] se realiza un estudio para la determinación del

coeficiente de fricción entre pares de materiales en contacto que trabajan sin lubricación y se presenta un análisis de cómo se modifica el campo de tensiones de Hertz en presencia de una fuerza de fricción superficial distribuida en la superficie de contacto, cuya intensidad en cada punto depende del valor de la tensión de Hertz.

La solución del campo de tensiones en las inmediaciones de la superficie de contacto se representa en coordenadas elípticas (Fig 5) relacionadas con las cartesianas a través de las ecuaciones:

$$X = b \cdot \text{ch}(\alpha) \cdot \cos(\beta) ; \quad Z = b \cdot \text{sh}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)$$

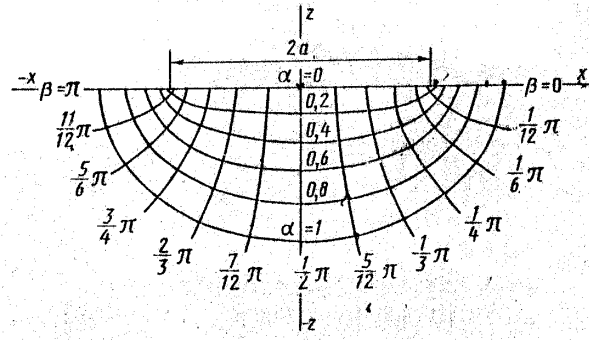


Fig-5. Sistema de coordenadas elípticas.

Las expresiones de las tensiones principales propuestas son las siguientes:

$$\sigma_1 = \sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot \left[(f \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta) + \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \beta \cdot \text{sh}^2 \alpha - f \cdot \text{sen} 2\beta \cdot \text{sh}^2 \alpha + f^2 \cdot ((e^{-2\alpha} \cdot \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \text{sh} \beta))}{\text{sen}^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}} \right] \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot 2\mu(f \cos \beta - \text{sen} \alpha) \quad (9)$$

$$\sigma_3 = \sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot \left[(f \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta) - \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \beta \cdot \text{sh}^2 \alpha - f \cdot \text{sen} 2\beta \cdot \text{sh}^2 \alpha + f^2 \cdot ((e^{-2\alpha} \cdot \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \text{sh} \beta))}{\text{sen}^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}} \right] \quad (10)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{z}{b}$$

z- Profundidad en la zona de contacto.

b - Semiancho de la zona de contacto.

β - Según figura 5.

Partiendo de las ecuaciones 8,9 y 10 en el presente trabajo se ha profundizado en el comportamiento de la intensidad de tensiones en la profundidad de la zona de contacto bajo la acción de fuerzas de fricción en la superficie, analizando la influencia del valor del coeficiente de fricción. Evaluando estas expresiones para $\beta = \pi/2$, o sea en la dirección vertical al punto de contacto, se obtiene:

$$\sigma_1 = -\sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot \left[-1 + \sqrt{\frac{\text{Sh}^2(\alpha) + f^2 \cdot e^{-2(\alpha)}}{1 + \text{Sh}^2(\alpha)}} \right] \quad (11)$$

$$\sigma_2 = -\sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot 2\nu = -0,6 \sigma_H \cdot e^{-\alpha} \quad (12)$$

$$\sigma_3 = -\sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot \left[-1 - \sqrt{\frac{\text{Sh}^2(\alpha) + f^2 \cdot e^{-2(\alpha)}}{1 + \text{Sh}^2(\alpha)}} \right] \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones 11,12 y 13 en 1 y haciendo algunas transformaciones se obtiene una nueva

ecuación para determinar la intensidad de tensiones en la profundidad del diente considerando la fricción.

$$\sigma_{i(\alpha)} = -\sigma_H \cdot e^{-\alpha} \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{\text{Senh}^2(\alpha) + f^2 \cdot e^{(-2 \cdot \alpha)}}{1 + \text{Senh}(\alpha)} \right) + 0,16} = -\sigma_H \cdot A \quad (14)$$

Evalutando la ecuación 14 para $\alpha = 0$, o sea en la superficie del diente, se obtiene como resultado la ecuación 7, una de las reportadas en la literatura para determinar la intensidad de tensiones en la superficie.

En la figura 6 se muestra el comportamiento de la

intensidad de tensiones para diferentes valores del coeficiente de fricción y a diferentes profundidades en la zona de contacto, evaluada para el mismo caso de la figura 4.

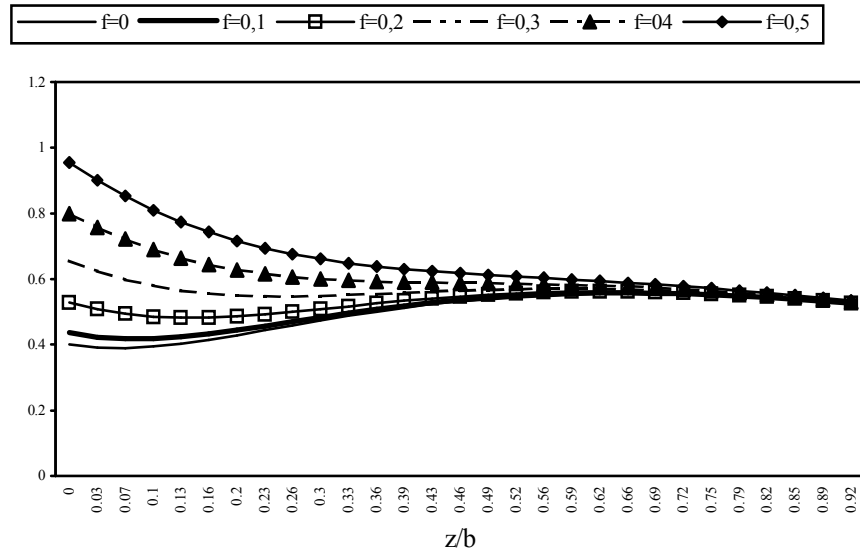


Fig-6. Intensidad de las tensiones en la profundidad del diente según el coeficiente de fricción.

Del análisis de la figura se puede concluir que a partir de valores del coeficiente de fricción cercanos a 0,3 la intensidad de tensiones máxima se produce en la superficie de los dientes y se pueden aplicar las ecuaciones 4,5,6 y 7 para determinarla y valorar la condición de paso al estado plástico.

Sin embargo en casos en los que el coeficiente de fricción se encuentra entre 0,1 y 0,3, es necesario disponer de una ecuación que permita determinar el valor de la intensidad de tensiones máxima y a que

profundidad ésta se produce, siendo además importante establecer a partir de que valor del coeficiente de fricción la intensidad de tensiones máxima ocurre en la superficie. Sobre este particular no se encontraron referencias por lo que fue necesario desarrollar el análisis que a continuación se describe.

Para obtener los valores máximos de la intensidad de tensiones en la profundidad del diente se derivó el término A, de la ecuación 14, con respecto a α y se igualó a cero, obteniendo la siguiente ecuación:

$$e^{-\alpha} \frac{79 \cdot e^{-\alpha} - 363 \cdot e^{4\alpha} + 3 \cdot e^{2\alpha} \cdot (300 \cdot f^2 + 79) + 300 \cdot f^2 + 79}{5 \cdot (e^{4\alpha} + 2 \cdot e^{2\alpha} + 1) \cdot \sqrt{79 \cdot e^{4\alpha} - 142e^{2\alpha} + 300 \cdot f^2 + 79}} = 0 \quad (15)$$

La solución de ésta ecuación en el intervalo de 0 a 1, para distintos valores del coeficiente de fricción se obtiene por métodos numéricos con el software Derive 4, lo que permitió determinar los valores de α para los que es máxima la intensidad de tensiones en la profundidad del diente, sustituyendo estos valores en la relación (14) se obtienen los valores del término A según el coeficiente de fricción.

En la tabla 1 se muestran los resultados de este análisis, el término A_s representa el factor por el que hay que multiplicar σ_H para obtener la intensidad de tensiones en la superficie y A_p , la magnitud que multiplica σ_h para valorar la intensidad en la profundidad.

Tabla 1. Resultados del análisis.

| f | A_s | A_p | $\alpha=z/b$ |
|----------|----------------------|----------------------|--------------------------------|
| 0,05 | 0,420 | 0,557 | 0,6561 |
| 0,1 | 0,4358 | 0,5588 | 0,6499 |
| 0,15 | 0,4769 | 0,5605 | 0,6417 |
| 0,2 | 0,5291 | 0,5630 | 0,6292 |
| 0,22 | 0,5524 | 0,5643 | 0,6227 |
| 0,23 | 0,5645 | 0,5650 | 0,6191 |
| 0,24 | 0,5794 | 0,5665 | 0,6109 |

De la tabla se puede concluir que a partir de valores del coeficiente de fricción mayores que 0,23 la intensidad de tensiones máxima se produce en la superficie y para valores menores se produce en la profundidad.

La dependencia de A_p con el coeficiente de fricción se ajusta a una ecuación de segundo grado con un error estándar de 0,00004, obteniéndose entonces la ecuación 16 para la determinación de la intensidad de tensiones máxima cuando el coeficiente de fricción es menor que

0,23, la que permitirá valorar la resistencia al flujo plástico de los engranajes que trabajen en condiciones de lubricación mixta.

$$\sigma_{\text{imax}} = \sigma_H (0,5576 - 0,005313 \cdot f + 0,1608 \cdot f^2) \quad (16)$$

Con un procedimiento similar al descrito se obtiene una ecuación para determinar la profundidad a que ocurre la intensidad de tensiones máxima.

$$z = b \cdot (0,65461 + 0,03923 \cdot f - 0,8382 \cdot f^2) \quad (17)$$

2.Conclusiones

En el cálculo de la resistencia al flujo plástico de los dientes de engranajes abiertos es necesario tener en cuenta la fuerza de fricción en la superficie.

Cuando el coeficiente de fricción entre los dientes es mayor que 0,23 la intensidad de tensiones máxima se produce en la superficie del diente y para valores menores ocurre en la profundidad, en este caso puede ser determinado su valor por la ecuación 16 obtenida en el presente trabajo.

3.Bibliografía

1. Albarracín Aguillon, P., Tribología y lubricación industrial” Editorial LITOCHOA, Bucaramanga, Colombia, 1995.
2. Aleksandrov A.V y Potapov V.D., Fundamentos de la teoría de la elasticidad y la plasticidad. Editorial Vischaya Schkola. Moscú 1990.
3. Errichello R., Analysis techniques end gear damages .Power Transmission Design (USA), 23-26, Marzo 1995.
4. Feodosiev, V I., Resistencia de Materiales. Editorial MIR. Moscú 1980.
5. Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear teeth. AGMA 2001-1995.
6. Krudiatzez V.N., Determinación de las cargas de cálculo en las transmisiones por engranajes. Viestnik Mashinostroienia # 8(Rusia), 1985.(En ruso).
7. Pisarenko, G S. Manual de resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú 1989. 11
8. Ríajorski A.M. Cálculo del coeficiente de fricción en materiales de construcción. Trenie e Iznos (Rusia). T.10 No5, 1989.p 852-860.
9. Rodríguez Poveda, A. Tribología de las coronas de molinos de caña de azúcar. Tesis de Maestría. Universidad Central de Las Villas. 1997.
10. Rodríguez, C., Tribología de engranajes cilíndricos. Memorias del Curso Internacional de Postgrado. Riobamba. Ecuador 1995.
11. Stachowiack, G y Batchelor, A., Engineering tribology”. Editorial ELSEVIER. Amsterdam.1993.
12. Transmisiones dentadas evolventes cilíndricas. Cálculos de resistencia. GOST21354-75.
13. Turbin G.K. Fatiga por contacto en transmisiones por engranajes. Editorial Schkola. Moscú. 1962. (En Ruso).
14. Turbin, G.K. Fatiga por contacto. Editorial Schkola Moscú. 1972.

Calculation of plastic flow resistance in teeth of open gear transmissions.

Abstract

The failure by frictional creep on flanks of the teeth in open, gears transmissions is frequent with poor lubrication and low hardenes, being characterized by deformation on the top and near to polar area.

In spite of the before outlined, different standards of gear calculation do not offer a calculation method to prevent this failure in wich friction between teeth surface has a remarkable influence.

In the present work is carried out a study of the behavior of tensions field in the surface and undersurface of gear teeth working in a limit lubrication regimen with a friction coefficient bigger than 0,1 a formulation that allow the verification of resistance to plastic flow of the material when the friction coefficient is smaller than 0,23, is obtained

Key words: Plastic flow, hertz stress, open gears.