

Modelación matemática del funcionamiento de las coronas de molinos considerando la flotación de la maza superior

Mario Javier Cabello-Ulloa, Juan José Cabello-Eras, Jorge Moya-Rodríguez,
Rafael Goytisolo-Espinosa, José Alberto Velásquez-Pérez, Juan Rafael Mestizo-Cerón

Recibido el 29 de marzo de 2011; aceptado el 11 de julio de 2011

Resumen

En este trabajo se propone un mecanismo equivalente para modelar el funcionamiento de las coronas de los molinos de caña de azúcar, que permite tomar en cuenta la forma real del perfil de los dientes trazados por arcos de círculos y la variación de la distancia entre centros durante su funcionamiento. Aplicando el método grafo-analítico al modelo propuesto se obtiene una función cinemática que define la posición angular instantánea de la corona conducida con dependencia de la distancia entre ejes de las ruedas y la posición angular de la corona conductora. Aplicando métodos paramétricos se obtienen ecuaciones para la velocidad y aceleración que son generales para cualquier tipo de perfil de dientes en engranajes que trabajan con variación de distancia entre centros. Finalmente se grafican estos parámetros para el funcionamiento de las coronas de un molino real concluyéndose que estas tienen relación de transmisión instantánea variable y que por el solo hecho de la forma del perfil se producen aceleraciones.

Palabras claves: corona de molino, engranaje, mecanismo plano, modelación, cinemática del molino.

An equivalent mechanism for the kinetic and dynamic analysis of the sugar cane mill gears

Abstract

Equivalent mechanism is proposed for modeling sugar cane mills gears, which allows to take into account the shape of the tooth profile formed by circular arcs and the variation of the distance between centers for operation. Applying the graph-analytical method to the proposed model is obtained a function to define the instantaneous angular position of the sugar cane mill gear in relation with the instantaneous angular position of driver gear and the center distance of gears. General equations for the velocity and acceleration for any type of gear tooth profile with variable distance between centers are proposed through parametric method. Plotted these parameters for real sugar cane mill gear and it is concluded that the instantaneous speed ratio is variable and the profile shape produced accelerations.

Key words: sugar cane mill gear, gear, plane mechanism, modeling, mill kinematics

Introducción

El molino de caña de azúcar es una instalación esencial en la Industria Azucarera, y la base de su configuración actual data de finales del siglo XIX, aunque algunos autores opinen que “la ciencia que estudia el comportamiento de los mecanismos y las máquinas no ha intervenido en las transformaciones que han sufrido los molinos hasta la actualidad” [1], esta aseveración no es rigurosamente cierta ya que estos han sido objeto de la atención de numerosos ingenieros e investigadores y que en la literatura especializada se pueden localizar numerosos trabajos de investigación sobre el estudio del molino, siendo evidente que queda mucho por hacer como explica el mismo Espinosa [1], quien después de una amplia revisión de la literatura llega a las siguientes conclusiones:

- a) Los modelos matemáticos reportados en la literatura especializada no se corresponden exactamente con el funcionamiento real de la máquina.
- b) Se comprobó que existen más de 22 expresiones para el cálculo del consumo de potencia de un molino de caña de azúcar y ninguna se corresponde exactamente con las mediciones realizadas en los molinos en funcionamiento.
- c) Es conocido que algunos elementos de los molinos de caña fallan con frecuencia de modo impredecible.

En general en los trabajos dedicados a estudiar las fallas de distintos elementos del molino de caña [2-8], no se consideran las cargas dinámicas originadas por no ser evolvente los dientes de las coronas y por la flotación de la maza superior, en opinión de los autores por no haberse desarrollado los modelos matemáticos que lo permitan.

Espinosa [1] realiza un análisis del grado de movilidad del molino de caña a partir de un mecanismo equivalente similar al mostrado en la figura 1.

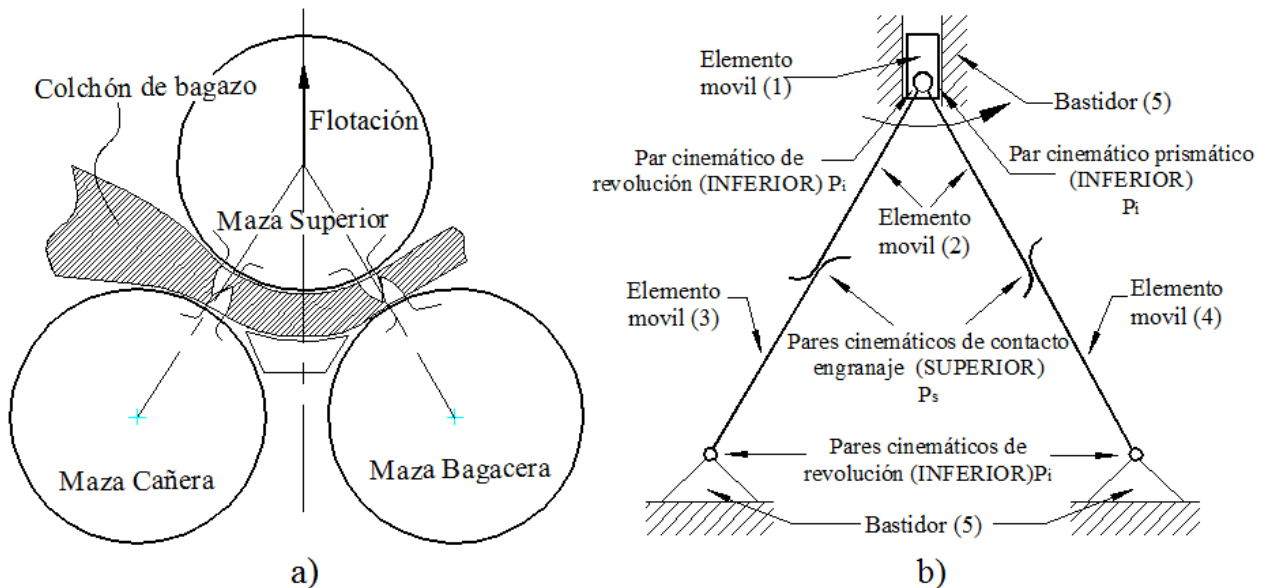


Figura 1. Esquema cinemático de un molino de caña de azúcar

El Esquema del Molino mostrado en la figura 1a representa el funcionamiento de este, en el que el jugo se extrae al comprimir la caña mientras pasa entre las mazas, el movimiento entre estas se transmite a través de coronas de molinos, siendo la motriz la asociada a la maza superior.

La figura 1 b) representa el mecanismo equivalente propuesto por Espinosa [1], este mecanismo tiene grado de movilidad 2 resultado de tener dos fuentes motrices; el momento aplicado a la maza superior y la flotación de esta que resulta de la variación del grosor del colchón de caña.

Los pares cinemáticos superiores representan el contacto de los dientes en las coronas, por lo que resulta evidente que esclarecer su funcionamiento es de vital importancia en cualquier intento de analizar las cargas dinámicas en los molinos de caña.

El objetivo principal del presente trabajo es proponer un mecanismo equivalente para modelar el funcionamiento de un molino de caña, que permita determinar los parámetros cinemáticos de la rotación de

las mazas considerando la forma no evolvente de los dientes de las coronas y la flotación de la maza superior.

Fundamentos del modelo

Los primeros estudios sobre el funcionamiento de las coronas de molino en Cuba datan de finales de los años 70 e inicios de los 80, y en general se resumen en la Tesis Doctoral de Moya Rodríguez [9], en todos estos trabajos no se tomo en cuenta la forma real de los dientes, que como se muestra en la figura 2 se trazan a través de arcos de círculo, sino que realizaban una aproximación a dientes evolventes con perfil de evolvente.

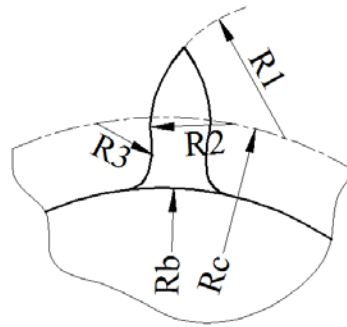


Figura 2. Trazado del perfil real de los dientes de las coronas de molinos.

En un trabajo enfocado al estudio de la lubricación y la resistencia superficial de las coronas [10], se advirtió que la aproximación a evolvente no era suficiente para este propósito y se desarrolló un modelo geométrico matemático, basado en el principio físico de que la normal común a dos cilindros en contacto pasa necesariamente por el centro de ambos, por lo que la normal común a las superficies en contacto durante el engrane de los dientes de las coronas pasa por el centro de trazado de los arcos de círculo utilizados para conformar el perfil, como se muestra en la figura 3, encontrándose el punto de contacto sobre esta línea a una distancia de cada centro de trazado igual al radio del círculo ya que la relación de transmisión en estos engranajes es unitaria.

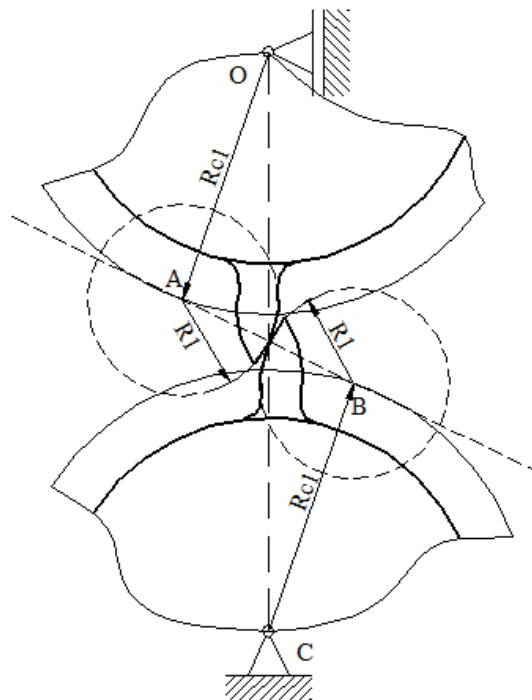


Figura 3. Fundamento del modelo geométrico matemático.

Este modelo permitió determinar la trayectoria del punto de contacto y sus coordenadas respecto a los centros de rotación de las coronas, determinar el comportamiento de la velocidad de deslizamiento entre los dientes a lo largo del contacto, imprescindible para cualquier análisis de lubricación de engranajes, así como la relación de transmisión instantánea que fluctúa como resultado de que el perfil de los dientes no cumple el teorema fundamental de engranajes de que "la normal hacia los perfiles en contacto de los dientes, trazada en el punto de su contacto, divide la distancia entre los centros en dos segmentos inversamente proporcionales a las velocidades angulares" [11].

Negrín y Franco en su investigación [12], aproximaron el perfil de los dientes a engranajes epicicloidales y con esto determinaron la velocidad angular instantánea de salida, ratificando que la relación de transmisión instantánea no es constante.

Los trabajos realizados hasta el momento sobre la cinemática de las coronas de molino no incursionan en la determinación de la aceleración angular en estas y los métodos de cálculo desarrollados se basan en análisis geométricos y aproximaciones a otros perfiles, por lo que no tienen carácter general ni permiten considerar el efecto de la flotación pues "para lograr la creación de métodos generales se requiere el empleo de las magnitudes variables y funcionales" [13].

Propuesta del mecanismo equivalente

En la figura 4 se expone el mecanismo equivalente propuesto a partir de aplicar el mismo principio aplicado por Cabello [10] ya explicado en la figura 3, este permitirá modelar el proceso de engranamiento de las coronas de molino a través de un mecanismo de 5 elementos compuesto por tres barras, una corredera y el bastidor. Además los pares cinemáticos son todos del tipo inferiores de clase uno con un solo grado de libertad, específicamente 4 de revolución y 1 prismático.

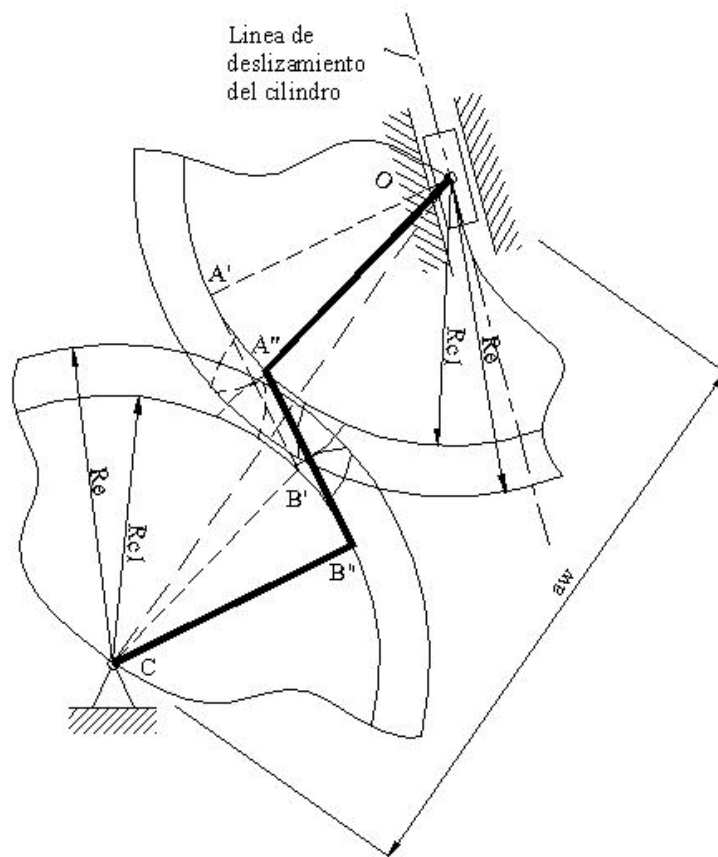


Figura 4. Mecanismo propuesto para el análisis cinemático y dinámico de las coronas de molinos
La determinación del grado de movilidad del mecanismo se realiza a través de la expresión conocida como Ecuación de Grübler para mecanismos planos [1]

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_i - p_s \quad (1)$$

Donde: Grado de movilidad del mecanismo.

n : Número de elementos del mecanismo.

p_i : Número de pares cinemáticos superiores.

p_s : Número de pares cinemáticos inferiores.

$$W = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 + 0 = 2 \quad (2)$$

El grado de movilidad del mecanismo propuesto es 2 al igual que en el esquema cinemático planteado en [1] para todo el molino.

Modelo cinemático propuesto

Para el mecanismo equivalente propuesto se plantea una función analítica del ángulo de giro de la rueda conducida con el de la conductora y la variación de la distancia entre centros.

$$\psi = f(\varphi, a_w) \quad (3)$$

Donde: ψ : Ángulo de giro instantáneo de la rueda conducida.

φ : Ángulo de giro instantáneo de la rueda conductora.

a_w : Distancia entre centros instantánea.

La expresión (3) es una función de dos variables en el tiempo independientes entre sí y que a su vez representan los dos movimientos de entrada acorde al análisis de la movilidad dado en la ecuación (2).

A partir de la función (3) que expresa la relación del ángulo de giro instantáneo de las coronas se pueden obtener funciones para la velocidad y aceleración de rotación instantánea. Resultando:

Relación entre las velocidades instantáneas de las ruedas:

$$W2 = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot W1 + \frac{\partial \psi}{\partial a_w} \cdot V_{aw} \quad (4)$$

Relación entre las aceleraciones instantáneas de las ruedas:

$$\alpha2 = \left(\alpha1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + a_{aw} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial a_w} + W1^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + V_{aw}^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial a_w^2} + 2 \cdot W1 \cdot V_{aw} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial a_w} \right) \quad (5)$$

Donde:

$W2$: Velocidad angular instantánea de la rueda conducida.

$W1$: Velocidad angular instantánea de la rueda conductora y se define $W1 = \frac{d\varphi}{dt}$.

V_{aw} : Velocidad instantánea de variación de la distancia entre centros y se define $V_{aw} = \frac{da_w}{dt}$.

$\alpha2$: Aceleración angular instantánea de la rueda conducida.

$\alpha1$: Aceleración angular instantánea de la rueda conductora y se define $\alpha1 = \frac{dW1}{dt}$.

a_{aw} : Aceleración instantánea de la variación de la distancia entre centros y se define $a_{aw} = \frac{dV_{aw}}{dt}$.

Las expresiones (4) y (5) permiten determinar la velocidad y aceleración de la rueda conducida y están formadas por una suma de términos cuya interpretación físicas que se explica en la tabla 1.

Tabla 1. Componentes de la Velocidad y Aceleración para engranajes de cualquier perfil que funcionen con variación de la distancia entre centros.

Término	Interpretación física
Velocidad	
$W2_{r\phi} = \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \cdot W1$	$W2_{r\phi}$: Es la componente de la velocidad angular de la rueda conducida asociada a la velocidad angular de la rueda conductora.
$W2_{raw} = \frac{\partial\psi}{\partial aw} \cdot V_{aw}$	$W2_{raw}$: Es la componente de la velocidad angular de la rueda conducida asociada a la velocidad de variación de la distancia entre centros.
Aceleración	
$\alpha2_{r\phi} = \alpha1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$	$\alpha2_{r\phi}$: Componente de la aceleración angular de la rueda conducida asociada a la aceleración angular de la rueda conductora.
$\alpha2_{raw} = a_{aw} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial aw}$	$\alpha2_{raw}$: Componente de la aceleración angular de la rueda conducida asociada a la aceleración con que varía la distancia entre centros.
$\alpha2_{r\phi^2} = W1^2 \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$	$\alpha2_{r\phi^2}$: Componente de la aceleración angular de la rueda conducida asociada a la forma del perfil del diente al variar instantáneamente la relación de transmisión.
$\alpha2_{rfaw} = V_{aw}^2 \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial aw^2}$	$\alpha2_{rfaw}$: Componente de la aceleración angular de la rueda conducida que está asociada a la forma del perfil del diente al variar instantáneamente la distancia entre centros.
$\alpha2_{r\phi aw} = 2 \cdot W1 \cdot V_{aw} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial aw \partial\phi}$	$\alpha2_{r\phi aw}$: Componente de la aceleración angular de la rueda conducida que está asociada al movimiento relativo de rotación de la rueda conductora y la variación de la distancia entre centros (aceleración de Coriolis).

Las expresiones (4) y (5) son generales para determinar los parámetros cinemáticos de cualquier engranaje y permitiendo considerar la forma del perfil de trazado de sus dientes y la posible variación de la distancia entre centros, solo bastaría tener en cada caso la función de relación de posiciones instantánea entre la corona conductora y la conducida $\psi = f(\phi, aw)$, representado por la expresión (3).

Para el caso específico del funcionamiento de las coronas de molino cuyos dientes tiene perfiles trazados por arcos de círculos y funcionan con variación instantánea de la distancia entre centros, se tomará el modelo del mecanismo equivalente propuesto en la figura 4 para determinar la ley de movimiento y aplicarle las expresiones (4) y (5) determinando así sus parámetros cinemáticos de funcionamiento.

Analizando geoméricamente la figura 4 y considerando que la longitud de la barra AB es igual a la suma de los radios de trazados del perfil de los dientes $R1+R1$ mostrados en la figura 3, se puede plantear una relación de posición instantánea del ángulo de giro de la rueda conducida en función del de la conductora y la variación de la distancia entre centros para el contacto entre los radios $R1-R1$, resultando:

$$\psi_1 = \left(\begin{array}{l} \arccos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(aw^2 + 2 \cdot Rc1^2 - 4 \cdot R1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\phi))}{Rc1 \cdot \sqrt{aw^2 + Rc1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\phi)}} \right) \\ - \arctan \left(\frac{Rc1 \cdot \sin(\phi)}{aw - Rc1 \cdot \cos(\phi)} \right) \end{array} \right) \quad (6)$$

Donde:

ψ_1 : ángulo de giro de la rueda conducida para contacto R1-R1

R1: radio de trazado del perfil de diente de una corona.

Rc1: radio de base para el trazado del perfil del diente de una corona.

La expresión que se ha obtenido es solo para cuando el contacto es entre R1-R1.

Para determinar la expresión análoga que define el contacto R2-R1 se realiza el análisis de la figura 5.

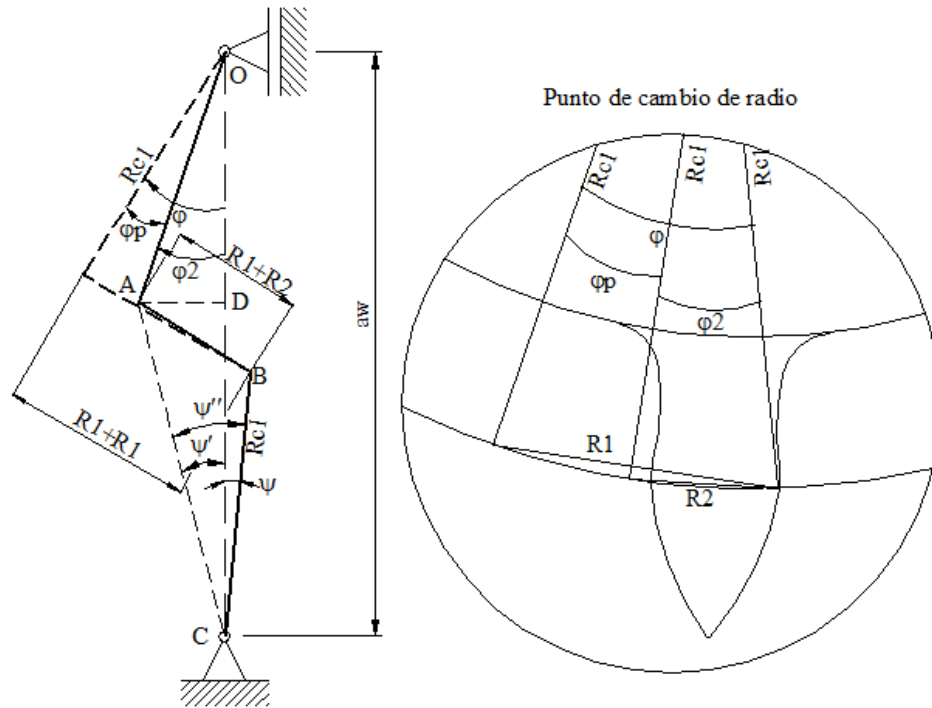


Figura 5. Mecanismo de tres barras para contacto R2-R1 del modelo a emplear

Del análisis de la figura 5 se establece que cuando se encuentra en ese contacto el ángulo de giro ψ para esa expresión resulta:

$\psi_2 = \begin{pmatrix} \arccos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(aw^2 + 2 \cdot Rc1^2 - (R1 + R2)^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi_2))}{Rc1 \cdot \sqrt{aw^2 + Rc1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi_2)}} \right) \\ - \arctan \left(\frac{Rc1 \cdot \sin(\varphi_2)}{aw - Rc1 \cdot \cos(\varphi_2)} \right) \end{pmatrix}$	(7)
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Donde: ψ_2 : ángulo de giro de la rueda conducida para contacto R2-R1.

φ_2 : ángulo de giro para contacto R2-R1 y resulta $\varphi_2 = \varphi - \varphi_p$

φ_p : ángulo de cambio de radios y resulta $\varphi_p = \arccos \left(\frac{2 \cdot Rc1^2 - R1^2}{2 \cdot Rc1^2} \right) - \arccos \left(\frac{2 \cdot Rc1^2 - R2^2}{2 \cdot Rc1^2} \right)$

Con las ecuaciones (6) y (7) se obtiene el ángulo de giro de la rueda conducida para cada instante y cada tipo de contacto que puede ocurrir en el engranaje, en función del ángulo de giro de la rueda conductora y la variación de la distancia entre centros.

Con el objetivo de obtener una expresión general se hace uso de una función continua a intervalos denominada CHI y definida de la siguiente manera:

CHI(a, x, b) es la función característica de un intervalo:

Si $a < x < b$, CHI(a, x, b) se simplifica a 1.

Si $x < a < b$ ó $a < b < x$, se simplifica a 0.

Donde: a: ángulo φ en el que finaliza el contacto R2-R1 y empieza R1-R1

b: ángulo φ en el que finaliza el contacto R1-R1 y empieza R1-R2

Resultando para la ecuación general que expresa el ángulo de giro de la rueda conducida en función del ángulo de giro de la conductora como $\psi = \psi_1 \cdot \text{CHI} + \psi_2 \cdot (1 - \text{CHI})$ de lo que sustituyendo se obtiene:

$$\psi = \left(\arccos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(aw^2 + 2 \cdot Rc1^2 - 4 \cdot R1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi))}{Rc1 \cdot \sqrt{aw^2 + Rc1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi)}} \right) - \arctan \left(\frac{Rc1 \cdot \sin(\varphi)}{aw - Rc1 \cdot \cos(\varphi)} \right) \right) \cdot \text{CHI} + \left(\arccos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(aw^2 + 2 \cdot Rc1^2 - (R1+R2)^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi_2))}{Rc1 \cdot \sqrt{aw^2 + Rc1^2 - 2 \cdot aw \cdot Rc1 \cdot \cos(\varphi_2)}} \right) - \arctan \left(\frac{Rc1 \cdot \sin(\varphi_2)}{aw - Rc1 \cdot \cos(\varphi_2)} \right) \right) \cdot (1 - \text{CHI}) \quad (8)$$

Las derivadas parciales de la ecuación (8) necesarias para aplicar las ecuaciones (4) y (5) se determinaron mediante el software matemático MATLAB.

Las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ y $\frac{\partial f}{\partial aw}$ definen las relaciones de transmisión instantánea entre

el movimiento rotatorio de salida en la rueda conducida respecto al movimiento rotatorio de entrada de la rueda conductora y a la variación de la distancia entre centros respectivamente, mientras que las de segundo

orden $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial aw^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial aw \partial \varphi}$ definen la variación de la relaciones de transmisión instantánea y su efecto

simultáneo en la aceleración angular de la rueda conducida.

Cada derivada parcial de la ecuación (8) tomará la forma de una suma de términos:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \cdot \text{CHI} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \cdot (1 - \text{CHI}); \quad \frac{\partial f}{\partial aw} = \frac{\partial f_1}{\partial aw} \cdot \text{CHI} + \frac{\partial f_2}{\partial aw} \cdot (1 - \text{CHI}); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2} \cdot \text{CHI} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varphi^2} \cdot (1 - \text{CHI});$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial aw^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial aw^2} \cdot \text{CHI} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial aw^2} \cdot (1 - \text{CHI}); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial aw \partial \varphi} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial aw \partial \varphi} \cdot \text{CHI} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial aw \partial \varphi} \cdot (1 - \text{CHI})$$

Como se puede notar en la ecuación (7) la función ψ_2 para el contacto R2-R1 no es directamente una función de φ pero si está relacionada directamente lineal $\varphi_2 = \varphi - \varphi_p$.

φ_p es un valor constante para cada perfil por lo que el diferencial de φ_2 es igual al diferencial de φ . Esto

implica que si se quiere hallar la derivada $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$ se puede expresar que $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi}$ y como $\partial \varphi_2 = \partial \varphi$,

la derivada $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}$ va a ser igual a la derivada $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}$ evaluada en φ_2 .

Esto también ocurre para cada derivada parcial de ψ_2 por lo que bastará con determinar las derivadas respecto a φ_2 .

La velocidad y aceleración angular de la rueda conductora $W1$ y $\alpha1$, se pueden determinar conociendo la ley del movimiento de entrada a la corona conductora el cual estará definido por el sistema motriz y de transmisiones que se empleen para accionar el molino.

La velocidad y aceleración de la variación de la distancia entre centros V_{aw} y a_{aw} , se pueden determinar conociendo la ley de movimiento con la que se produce la flotación de la masa del molino.

Aplicación del modelo propuesto al funcionamiento de las coronas de un molino real con determinadas consideraciones

El modelo propuesto es general para cualquier juego de coronas de molinos como los descritos anteriormente, en este trabajo se aplicará a un molino del CAI 14 de Julio en Cienfuegos. Los datos del perfil de la corona que emplea se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Parámetros geométricos de una corona del perfil de corona objeto de estudio (unidades en mm).

Perfil	R_p	R_i	R_0	R_e	R1	R2	R3	R4	Rc1	Rc2	Rc3	z
A	482.6	381.79	467.228	560.0	171.45	88.9	133.35	31.75	471.228	467.228	459.228	17

Las consideraciones a tener en cuenta en este caso son:

- La velocidad de entrada del movimiento a la corona conductora $W1$ es constante.
- Se considerará la variación de la distancia entre centros solo en tres posiciones para evaluar el modelo matemático, se trabaja en la medición en tiempo real de los valores instantáneos de la flotación de la maza superior y el ajuste de una ecuación que la describa en función del tiempo para introducirla al modelo.

Considerando lo anterior se sustituye y aplica la ecuación (8) a las expresiones (4) y (5) para obtener la velocidad y aceleración instantánea de la corona conducida lo que se muestra en las figuras 6. y 7 respectivamente.

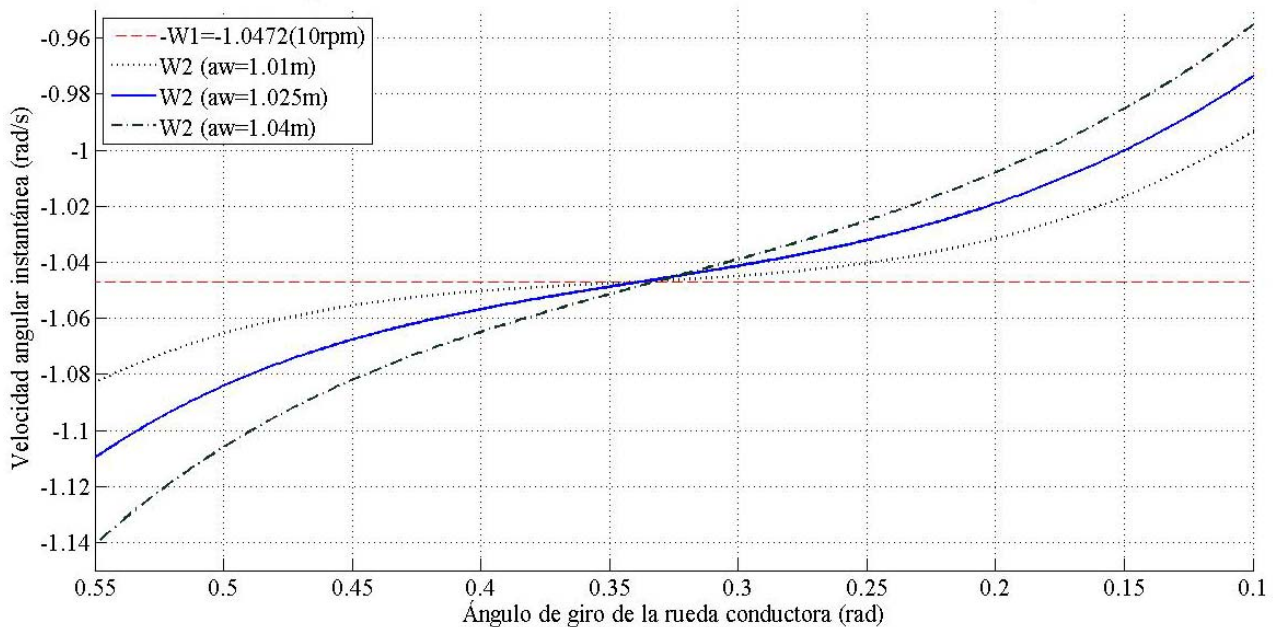


Figura 6. Dependencia de la velocidad angular de giro de la rueda conducida con el ángulo de la rueda conductora para tres posiciones de la distancia entre centros.

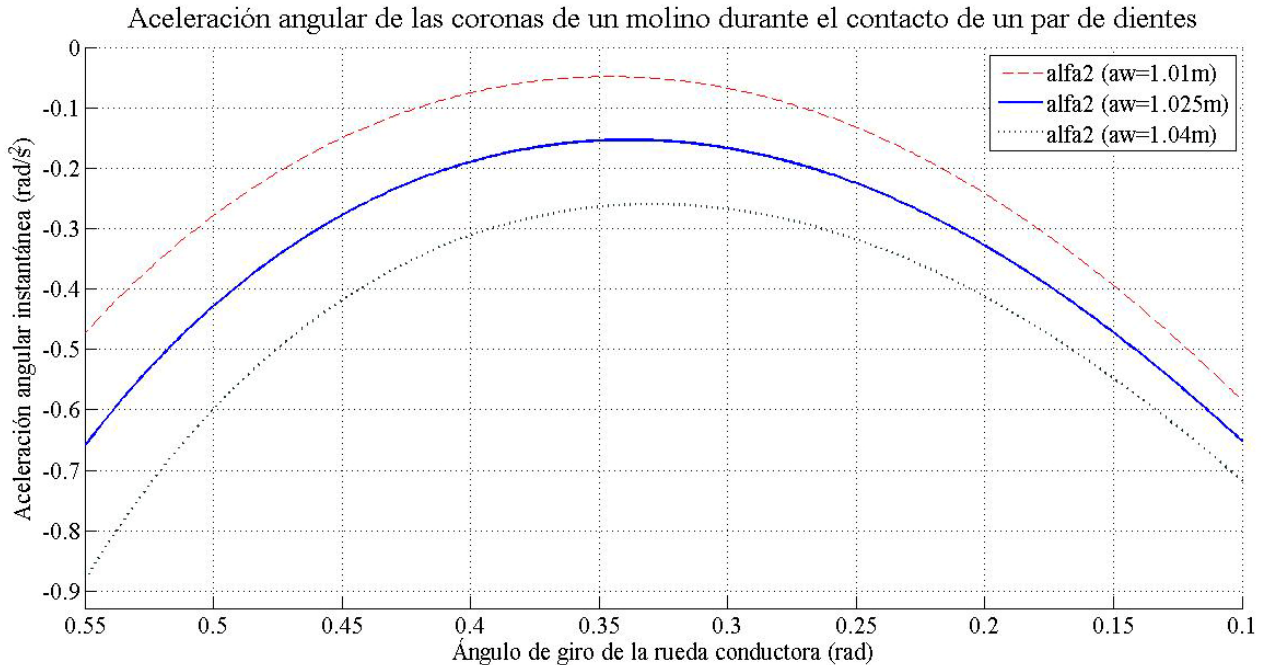


Figura 7. Dependencia de la aceleración angular de la rueda conducida con el ángulo de la rueda conductora para tres posiciones de la distancia entre centros.

En la figura 6 se aprecia que la velocidad de rotación instantánea de la corona conducida no es constante a pesar de que la de la conductora si lo sea, esto quiere decir que la relación de transmisión instantánea es variable por el solo hecho de la forma de trazado de los perfiles del diente con arcos de círculos. En la

ecuación (4), $W2 = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \cdot W1 + \frac{\partial \psi}{\partial a_w} \cdot V_{aw}$ como la distancia entre centros se considera constante el

segundo termino resulta nulo por lo que las graficas dadas en la figura 6 se obtienen por $W2 = \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \cdot W1$ y

como la velocidad de entrada $W1$ se considera constante la relación de transmisión instantánea definida en este caso por la derivada $\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ es la que resulta variable. Como la función a derivar definida por la ecuación

(6) depende de ϕ , a_w y la geometría del perfil y en este caso se considera la distancia entre centros constante, esto confirma que el hecho de que la geometría de los dientes trazada por arcos de círculos hace variable la relación de transmisión instantánea.

La ecuación (5) de la aceleración se puede simplificar tomando en cuenta las consideraciones anteriores, al no variar la distancia entre centros no existirá ni velocidad V_{aw} ni aceleración a_{aw} de la misma, también al girar la rueda conductora con velocidad constante tampoco existirá aceleración angular α_1 por lo que los

términos asociados a estos valores serán cero y resultará para este caso: $\alpha_2 = W1^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$. Esto visto en la

figura 7 quiere decir que por el hecho solo de la forma del perfil de los dientes existirá una aceleración angular en la corona conducida.

Vale la pena preguntarse que ocurriría con estas magnitudes al considerarse los demás términos de las ecuaciones (4) y (5), o lo que es lo mismo considerar la cinemática de variación de la distancia entre centros y del movimiento de entrada a la corona conductora en su funcionamiento real que sin dudas son variables.

Conclusiones

1. El mecanismo propuesto expresa el funcionamiento de las coronas de molinos. Considerando la forma real de los dientes y de su análisis se obtiene un modelo matemático del que se derivan las ecuaciones que expresen la velocidad y aceleración angular instantánea de la corona conducida.
2. Al aplicar el modelo propuesto a una corona de molino real se determinaron las curvas de velocidad y aceleración instantánea durante el contacto de un par de dientes y aunque se considera en este caso que el movimiento de entrada a la corona conductora es constante y no se varía la distancia entre centros instantáneamente, se determina que la relación de transmisión instantánea varía alrededor de de 1 en los intervalos máximos desde 0.9 a 1.1 con un 10% de variación, lo que trae consigo aceleraciones que son producto solamente de la forma del perfil de los dientes trazados por arcos de círculos.
3. Las ecuaciones obtenidas para la cinemática del funcionamiento de las coronas de molino son funciones de dos variables en el tiempo correspondientes a los dos movimientos de entrada al molino (velocidad angular y flotación de la maza superior), si se conoce previamente dichas leyes de movimientos se puede determinar toda la cinemática del molino y con esto las cargas dinámicas que en él se producen.

Referencias

1. Espinosa, A., Fernández, F., *et al.* "Determinación del grado de movilidad de un molino de caña". *Revista Centro Azúcar*. 2003, vol. 30, n° 2, p. 76-78. ISSN 0253-5777.
2. Arzola, N. "Esquema de análisis para los árboles de los molinos de caña de azúcar y aplicación de la Mecánica de la Fractura en la evaluación de la falla por fatiga". Tesis Doctoral. Universidad Central de las Villas. Santa Clara, Cuba. 2003.
3. Arzola, N., Goytisoló, R., *et al.* "Determinación de la vida remanente de los árboles de los molinos de caña de azúcar con grieta semielíptica superficial". *Ingeniería Mecánica*. 2003, vol. 6, n° 2, p. 43-52. Disponible en: http://www.cujae.edu.cu/ediciones/Revistas/Mecanica/Vol-6/2-2003/10-Determinaci%C3%B3n%20de%20la%20vida%20remanente%20Cabello_pag43-52_.pdf ISSN 1815-5944.
4. Coronado, J. J. "Fracture mechanics approach of repaired top roll shafts in cane mill". *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*. 2005, vol. 16, n° 6, p. 419-429. ISSN 0334-8938.
5. Rivas, J. S., Coronado, J. J., *et al.* "Tribological aspects for the shafts and bearings of sugar cane mill". *Journal Wear*. 2006, vol. 261, n° 7-8, p. 779-784. ISSN 0043-1648.
6. Rivas, J. S., Rodríguez, S., *et al.* "Análisis de la confiabilidad de los ejes de molino de caña de azúcar". *Revista Tecnura*. vol. 8, n° 15, p. 45-54. Disponible en: <http://tecnura.udistrital.edu.co/downloads/revista15/pdf/analisis.pdf>. ISSN 0123-921X.
7. Rodríguez, S., Coronado, J. J., *et al.* "Predicción de vida remanente en ejes de maza superior de molino de caña". *Revista Ingeniería e Investigación*. 2006, vol. 26, n° 1, p. 78-85. Disponible en: <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/ingevn/article/download/14686/18678>. ISSN 0120-5609.
8. Rodríguez, S., Coronado, J. J., *et al.* "Life prediction for the top roller shafts of sugar mills". *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*. 2006, vol. 17, n° 5, p. 327-336. ISSN 0334-8938.
9. Moya, J. "Diseño de coronas de molinos de caña de azúcar". Tesis Doctoral. Universidad Central de Las Villas. Santa Clara, Cuba. 1994.
10. Cabello Eras, J. J. "Cinemática, transmisión de la carga, lubricación y resistencia superficial de las coronas de molinos de caña de azúcar". Tesis Doctoral. Universidad Central de las Villas. Santa Clara, Cuba. 1999.
11. Norton, R. *Diseño de maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. 4ta ed. México: McGraw-Hill, 2009. ISBN 97-897-010-688-47.
12. Negrín, L. y Franco, R. "Estudio de las curvas epicicloide y evolvente para formar el perfil de los engranajes que operan con distancia entre centros variable". *Ingeniería Mecánica*. 2007, vol. 10, n° 3, p. 71-76. Disponible en: http://www.cujae.edu.cu/ediciones/Revistas/Mecanica/Vol-10/3-2007/11_2007_03_71_76.pdf ISSN 1815-5944.
13. Stewart, J. *Calculus: Concepts and Contexts*. 4ta ed. Cengage Learning, 2009. ISBN 04-955-574-20.

**Mario Javier Cabello-Ulloa^I, Juan José Cabello-Eras^I, Jorge Moya-Rodríguez^{II},
Rafael Goytisoló-Espinosa^I, José Alberto Velásquez-Pérez^{III}, Juan Rafael Mestizo-Cerón^{III}**

I. Universidad de Cienfuegos Carlos Rafael Rodríguez. Facultad de Ingeniería Mecánica. Cuba

E-mail: mjcabello@ucf.edu.cu, jcabello@ucf.edu.cu, ragoyti@ucf.edu.cu

II. Universidad Central de Las Villas Marta Abreu. Facultad de Ingeniería Mecánica. Cuba

E-mail: jorgemr@uclv.edu.cu

III. Universidad Veracruzana. Facultad de Ingeniería Mecánica. México

E-mail: jvelazquez@uv.mx, jmestizo@uv.mx