

Modelo de un muelle de ballestas considerando la fricción entre hojas.

J. Rodríguez Matienzo, L. Otero Pereiro.

Instituto Superior Politécnico *José Antonio Echeverría* (ISPJAE).
Facultad de Ingeniería Mecánica. Departamento de Mecánica Aplicada
Calle 116 s/n, CUJAE, Marianao 15, Ciudad de la Habana, Cuba.
E-mail: matienzo@mecanica.cujae.edu.cu

(Recibido el 14 de Noviembre de 2004, aceptado 12 de Marzo de 2005).

Resumen.

Se brinda un modelo de una ballesta por el MEF incluyendo el contacto y la fricción. El problema se convierte en no lineal y se resuelve por el método de Newton-Raphson como un problema de optimización con restricciones. Se hace un análisis de las condiciones iniciales y de contorno para alcanzar la solución en un tiempo razonable, dando una estrategia para calcular el valor del penalty. Se logra una buena correspondencia entre los valores de desplazamiento reales y teóricos. Finalmente se hace el análisis modal del modelo.

Palabras claves: Ballestas, contacto, vibraciones, MEF.

1. Introducción.

La suspensión en un vehículo automotor es uno de los sistemas más importantes. Del correcto comportamiento de la suspensión dependen seguridad y confort, tanto para las personas, como también para lo que se transporta. Las cargas que se producen durante la marcha por la interacción vehículo-camino, pasan al bastidor y carrocería a través de la suspensión, y son modificadas por las características dinámicas de la misma.

El diseño correcto de las suspensiones es un aspecto al que los fabricantes dedican gran atención. El diseño comienza por la selección del tipo de suspensión a emplear y continúa con la elección del modelo matemático de la misma. De forma general es imprescindible una etapa paralela de experimentación de diferentes variantes de suspensión para llegar a la solución más adecuada.

Las suspensiones a partir de muelles de ballesta son usadas desde el inicio mismo de la industria automotriz, por sus características de costo, durabilidad, fácil mantenimiento, etc. Sin embargo los métodos de cálculo más conocidos son simplificados. Los modelos empleados también adolecen de ausencias, incluso algunos que usan elementos finitos o técnicas similares. Se puede decir entonces que:

- En general, no se tiene en cuenta la fricción entre hojas ni el comportamiento no lineal de la ballesta.
- Los modelos por elementos finitos son la vía más adecuada en estos momentos para la solución de ambas ausencias.
- Los modelos por elementos finitos deben incluir el problema del contacto y la fricción.

2. Los muelles de ballestas.

Los muelles de ballestas son artículos mecánicos usados de forma industrial en aplicaciones diversas desde hace más de un siglo, su objetivo principal es permitir el vínculo elástico entre dos elementos. Su necesidad es evidente en los diferentes tipos de vehículos usados por el hombre a través de los tiempos.

Los romanos usaban vigas de madera de cierta flexibilidad en un confortable vehículo llamado "Pilentum", usado por las mujeres de alta sociedad y llevado por esclavos. Nunca obtuvieron un vehículo que tuviera la posibilidad de desplazarse a buena velocidad y con control, razón por la cual sus legiones eran de soldados a pie. Las "quadrigas" usadas en las arenas del Coliseum eran sin duda rápidas, pero sin suspensión eran también muy poco seguras y solo servían para carreras.

El deseo de incrementar la velocidad de traslación llevó al hombre a emplear caballos u otros animales,

pero al mismo tiempo reveló la interacción camino-vehículo. Fue necesario tener en cuenta la seguridad y el confort. En 1804, en Inglaterra, Obadiah Elliot inventó el primer muelle de ballesta, compuesto por dos hojas, con un perno central; colocado de forma transversal en un carruaje Barouche, uno en cada eje. Se creaba así una de las primeras condiciones para el invento del automóvil [20].)



Barouche, versión posterior a 1804.

En 1908 Henry Ford empleó acero al vanadio para muelles de ballesta, colocados de la misma forma, uno en cada eje, logrando un significativo ahorro de peso sin pérdida de resistencia.

Soluciones similares se mantuvieron hasta 1934, cuando General Motors, Hudson y Chrysler introducen el muelle helicoidal en el eje delantero. Es solo después de la II Guerra Mundial que esta solución se generaliza, quedando el muelle de ballesta para el eje trasero, vehículos de carga o autos de gran porte.

La suspensión por aire, que incrementa su rigidez con la deformación, fue introducida por primera vez en 1909 por Cowey Motors en Inglaterra, pero no fue duradera. La primera efectiva fue fabricada por Firestone en 1933, a su vez resultó muy cara. Solo en 1984 Lincoln la emplea en varios modelos. Se usan actualmente en vehículos de carga. Una variante muy satisfactoria la emplea Citroën desde los años 60 con una suspensión hidroneumática, a base de aceite y aire [19]

Las barras de torsión se proponen por la Leyland en 1921, y son usadas ampliamente por Porsche en Alemania en casi todos sus modelos, comenzando por el VW en el prototipo de 1933. En E. U. sólo la Chrysler la uso en grandes modelos.

Otra esfera en la que los muelles de ballesta se emplean ampliamente es en la industria de prótesis externas, de miembros inferiores fundamentalmente. A pesar del surgimiento de nuevos materiales, las prótesis de pie a base de muelles de ballesta siguen siendo usadas por su gran durabilidad y relativo bajo costo [13, 17].

El diseño de los muelles de ballesta se hace generalmente a partir de modelos simplificados, que no

tienen en cuenta la fricción entre las hojas, [5]. Normalmente se calculan o comprueban los esfuerzos máximos en las hojas y la deformación máxima del conjunto para la carga máxima. El no considerar la interacción entre hojas del muelle hace que se trate al muelle de ballesta como un resorte lineal, con rigidez constante. En realidad, su comportamiento es no lineal y la rigidez es variable, dependiente de la deformación. En muchos análisis dinámicos de las suspensiones se incluye la rigidez del muelle también como una constante, y no se incluye el amortiguamiento debido a la ballesta. La ausencia de modelos de cálculo de ingeniería que reflejen estas características hace que frecuentemente se recurra a la experimentación para determinar las características dinámicas de las suspensiones.

Un modelo teórico que puede llenar el vacío en este tema puede ser el propuesto en [13], aunque este no incluye la fricción, permite determinar además de los parámetros usuales, las presiones entre láminas y la holgura entre las mismas bajo carga.

La obtención de una formulación teórica para determinar la forma de varias láminas colocadas una sobre otra bajo carga, sin considerar la fricción, se propone en [3]. Un estudio comparativo de un muelle de ballestas de acero y otro de composites se hace en [18], para uso automotriz. En el mismo se dan los resultados de un modelo por FEM de una ballesta de 4 láminas a carga estática. Estos se comparan con resultados usando el procedimiento de SAE HS 788 y otros experimentales, mostrando buena concordancia. Una propuesta de muelle de ballesta a base de composite, en específico GFRP se brinda en [1] para un vehículo ligero. Las causas de fallo de los muelles de ballestas de acero se estudian en [12]. El fallo prematuro más frecuente es atribuible a la fatiga. El autor destaca la importancia del proceso de endurecimiento en lo referido a la reducción de las grietas superficiales y a la correcta elección del espesor de las láminas.

El carácter no lineal de los muelles de ballesta se pone de manifiesto en las simulaciones de la dinámica de vehículos, sobre todo en casos de vehículos de gran porte o articulados. En [15] se discuten varias formas de modelar una suspensión por ballestas y por aire. En el caso de la suspensión por ballestas se señala que ésta tiene el mayor carácter no lineal dentro de las suspensiones automotrices, esto se manifiesta al resultar en un error del 45%, empleando el método UMTRI [21].

La no-linealidad de las suspensiones y su implicación en la modelación se señala también en [7]. Se usó el paquete ADAMS sustituyendo las ballestas por otros elementos. Los datos de rigidez y fuerza de fricción contra carga empleados confirman lo anterior, asimismo el autor resalta la dificultad de modelar correctamente la no-linealidad. En [22], según los datos de deformación contra carga sobre la suspensión, se observa como la no-

linealidad disminuye con la carga sobre la suspensión, tal como se plantea en [9].

La modelación de muelles de ballestas considerando el fenómeno del contacto entre láminas y la fricción sigue siendo un problema actual. El estudio del grado de no-linealidad y su influencia en la dinámica de las suspensiones dependen en gran medida en estos momentos de la obtención de datos experimentales, a falta de modelos más representativos.

El tratamiento del problema del contacto por FEM ha recibido especial atención por los investigadores en los últimos años. Desde los trabajos de Signorini entre 1933 y 1959, mucho se ha avanzado en la formulación. Un acertado resumen se hace en [11], se discuten los enfoques a partir de ecuaciones variacionales o inecuaciones variacionales; y se discuten los métodos del penalti y de Lagrange aumentado. En general es necesario usar un método numérico para resolver el problema no-lineal, y es también necesario seleccionar adecuadamente un conjunto de factores para asegurar la convergencia, y en un tiempo razonable, evitando que el problema sea “ill-conditioned”. El valor del penalti es de gran importancia, en [15] se propone una estrategia para lograr la convergencia y un resultado correcto. La estructuración del modelo en lo que respecta a discretización, valores de rigidez, ajuste de holguras, etc., se recomienda en [13]. La simulación de la fricción de Coulomb se hace normalmente por una aproximación que considera diferencias entre fricción estática y dinámica sin variar el coeficiente de fricción, a partir de los esfuerzos tangenciales [9, 11].

Es importante señalar que hay problemas de contacto resueltos a partir de modelos por elementos finitos en los cuales no interesan los esfuerzos de contacto (como en el problema de Hertz) sino que se requiere conocer el comportamiento en otra zona fuera del contacto. Un ejemplo son los engranajes, en los que junto a los esfuerzos de contacto se necesitan los esfuerzos de flexión en la base del diente [9, 16]. La confiabilidad del resultado del modelo de contacto, usando el penalti es analizada en [3]. Se definen dos tipos de error; energético y de desplazamiento.

Un modelo apropiado debe incluir el fenómeno del contacto, y la fricción, discutir el análisis de pequeñas o grandes deformaciones, permitir una solución en un tiempo de cálculo razonable y no ser “mal condicionado”.

3. El fenómeno del contacto.

Los fenómenos relacionados con el contacto y la fricción, no han sido siempre tenidos en cuenta en los diseños convencionales de ingeniería. Las principales complejidades desde el punto de vista teórico están en [11]:

- No-linealidad propia del problema, dada fundamentalmente por la incertidumbre en la determinación de las superficies que se ponen en contacto y las condiciones de contorno durante la carga.
- Las leyes de fricción son discontinuas y multivaluadas, no estudiadas aun suficientemente, por lo tanto requieren de un riguroso planteamiento matemático.
- Hay no-linealidades propias de orden geométrico y/o material, y en algunos casos factores dinámicos.

El contacto entre sólidos deformables fue planteado por primera vez por Hertz en 1881-1882, que determinó tensiones y deformaciones en la zona del contacto. El contacto unilateral (sólido deformable contra superficie rígida, por lo tanto, sin penetración) fue estudiado por Signorini entre 1933-1959. Otros autores han desarrollado las formulaciones para incluir el estudio de la fricción.

El considerar la fricción junto con el contacto trae aparejado un grupo de dificultades adicionales: la fuerza de fricción depende de las fuerzas normales de contacto, y el carácter de la fricción de Coulomb es discontinuo y multivariado. Kikuchi y Oden (1988), empleando el método de inecuaciones variacionales resolvieron el problema aplicando la carga externa gradualmente, introduciendo un penalti para la fuerza de contacto y regularizando la fuerza de fricción (aproximando una función no diferenciable a una diferenciable). Una solución paso a paso permitió lograr la convergencia, que depende fuertemente de la selección del valor inicial de penalti.

La solución a partir de ecuaciones variacionales, se basa en el principio del trabajo virtual. En estas formulaciones se parte de que se conoce la superficie de contacto. Las fuerzas de contacto y los desplazamientos son desconocidas, las fuerzas externas son aplicadas gradualmente y se resuelve paso a paso un problema típico de optimización con restricciones. El método de Newton-Raphson combinado con el uso de un penalti para imponer las condiciones de contacto, o con el método de Lagrange modificado, es usado para obtener la solución numérica del sistema de ecuaciones no-lineales. También se regulariza la ley de la fricción de Coulomb. Este método es el implementado en los códigos comerciales de elementos finitos.

Para alcanzar un resultado correcto en un problema de contacto es necesaria la estimación adecuada de un gran número de factores, entre ellos:

- La rigidez, normal y tangencial, de la zona de contacto.
- La naturaleza del contacto, una vez establecido (sin deslizamiento o con deslizamiento).
- El estado inicial (distancia entre superficies) para comenzar a aplicar la carga.

- Valor del paso de carga y de los intervalos de

La estimación de los valores numéricos de la mayoría de estos factores se dice que es “dependiente del problema” específico que se esté resolviendo. A pesar de las recomendaciones, casi siempre es imprescindible un proceso previo de prueba y error hasta llegar a los valores adecuados; la selección inadecuada conduce a tiempos extremadamente largos de cálculo para lograr la convergencia (si es que se logra), a no lograr la convergencia o a llegar a una solución, pero de un problema mal condicionado.

De las figuras 1 y 2, tomadas de [11] se tiene que el principio del trabajo virtual, formulado según Simo y Laursen (1992) se plantea como se observa en la ecuación (1).

Donde:

t_i^n y t_i^f son las componentes normal y tangencial de la fuerza de contacto en la actual superficie Γ_c^2 , que es la parte de 2 que se pone en contacto con 1, T_i representa las fuerzas superficiales aplicadas en Γ_s , b_i son las fuerzas volumétricas, u_i y \mathcal{E}_i son los desplazamientos y deformaciones virtuales, F_i^k son las cargas concentradas que actúan en los puntos k .

aplicación.

La solución del problema del contacto incluyendo la fricción se reduce a encontrar un campo de desplazamientos u_i y fuerzas de contacto t_i^n y t_i^f tales que las condiciones de contorno, incluyendo las condiciones de contacto y fricción sean satisfechas. O sea,

$$g_n \leq 0, \quad t^n \geq 0, \quad t^n g_n = 0 \quad (2)$$

Donde:

$$g_n = -d_n \leq 0, \quad (\text{contacto unilateral})$$

En [2] la primera expresión establece que un cuerpo no puede penetrar en el otro, la segunda que ambos cuerpos se empujan mutuamente. La condición complementaria dice que los cuerpos están o separados;

($t^n = 0, g_n < 0$); o en contacto; ($t^n \geq 0, g_n = 0$).

De esta forma se establece la no-penetración y la existencia de una fuerza de compresión mutua. Además, para la fricción:

$$|t^f| < \mu t^n \Rightarrow u_t = 0 \quad [3] \quad \text{no deslizamiento}$$

$$|t^f| = \mu t^n \Rightarrow u_t > 0 \quad [4] \quad \text{hay deslizamiento}$$

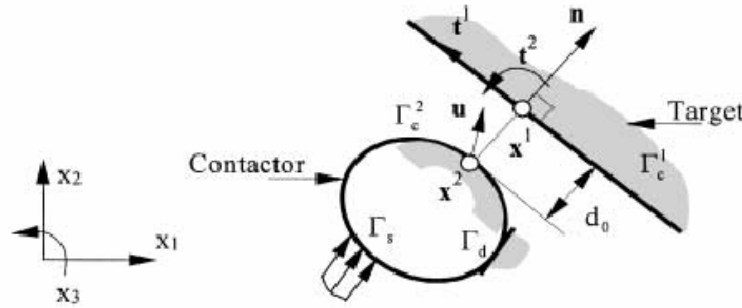


Fig. 1 Configuración antes del contacto.

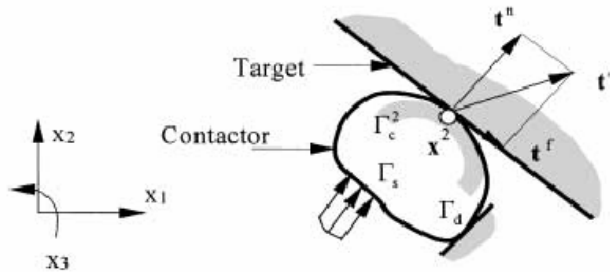


Fig. 2 Configuración después del contacto

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_s} T_i \delta u_i dS + \int_{\Gamma_c^2} t_i^n \delta u_i dS + \int_{\Gamma_c^2} t_i^f \delta u_i dS + \sum_k F_i^k \delta u_i^k \quad [1]$$

Para llegar a la solución se aplican las cargas externas paulatinamente. Las condiciones de contacto (las fuerzas) se imponen en forma de penalty, o se tratan como variables adicionales desconocidas en el método de Lagrange.

La solución por elementos finitos es implementada a partir de la expresión de la energía potencial. Sea un cuerpo elástico de volumen Ω sometido a pequeñas deformaciones u_i . Según (0):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega - \int_{\Omega} u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_s} u_i T_i dS - \sum_k u_i^k F_i^k \quad [5]$$

Que en forma matricial se plantea como:

$$\Pi(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad [6]$$

donde \mathbf{U} es el vector global de desplazamientos, \mathbf{K} es la matriz global de rigidez y \mathbf{F} es el vector global de fuerzas.

Para un problema de contacto, la solución se obtiene cuando el sistema está en equilibrio. El sistema se encontrará en equilibrio estable si la energía potencial es mínima, a la vez que se satisface que:

$$d_n \geq 0$$

lo que convierte lo anterior en un problema de optimización con restricciones, donde la expresión de la energía potencial es la función objetivo. O sea hay que resolver:

$$\min_u \Pi(u) \text{ para } d_n(u) \geq 0 \quad [7]$$

implementando la solución por el método de Lagrange la ecuación [6] se escribe como [4]:

$$L = \frac{1}{2} k u^2 - f u + f_n (g_n + s^2) \quad [8]$$

donde f_n es el multiplicador de Lagrange y s^2 es una variable para satisfacer las restricciones. Aquí f_n se interpreta como la fuerza requerida para imponer la restricción, o sea la fuerza de contacto es una fuerza de compresión entre los cuerpos en contacto.

Usando el método del penalty, se introduce una función penalty en la forma:

$$\pi_p = \frac{1}{2} r (g_n)_+^2 \quad [9]$$

donde r es el parámetro penalty y $(g_n)_+ = \max \{0, g_n\}$. La función objetivo ahora se incrementa con la función penalty y queda como:

$$\Pi_p = \Pi + \pi_p = \frac{1}{2} k u^2 - f u + \frac{1}{2} r (g_n)_+^2 \quad [10]$$

se puede demostrar que cuando $r \rightarrow \infty$, la solución de [10] es la solución del problema original y de [8], si el multiplicador de Lagrange se da como:

$$f_n = r g_n$$

La solución numérica consiste en establecer r y minimizar Π_p , después incrementar r y minimizar Π_p otra vez. Se continúa hasta que ocurran muy pequeños cambios en Π_p . El valor del penalty r se puede interpretar como la rigidez de un resorte artificial introducido entre los cuerpos en contacto.

Ambos métodos están implementados en varios códigos comerciales como ANSYS, en dependencia del tipo de elemento de contacto empleado en la modelación.

Es necesario dejar claro que un problema de contacto no siempre es de las características del problema de Hertz, basta con que se emplee un modelo en que haya dos o más cuerpos en contacto, cualquiera que sea su forma, para que tengan que tener en cuenta los aspectos planteados arriba.

4. Tratamiento por MEF.

Existen varios códigos comerciales que incluyen la posibilidad de modelar problemas de contacto entre sólidos. Uno de ellos es el ANSYS, que es el usado en este trabajo en su versión 5.7.

Para construir un modelo que incluya el contacto, primero se modelan los sólidos, tal como se hace para cualquier otro análisis. Es importante señalar que deben quedar definidas las líneas o superficies (si se trabaja en 3D) en que ocurrirá el contacto para cada cuerpo; es decir puede haber superficies o líneas comunes, pero estas **tienen que estar definidas para cada cuerpo por separado**. En cuando a la malla, en la medida en que sea más fina, podrá reflejar mejor el proceso de contacto, pero también impondrá mayores tiempos de cómputo. Las reglas normales para otros tipos de análisis se siguen también.

Los elementos de contacto se colocan en las líneas o superficies candidatas una vez que hallan sido malleadas. Una de ellas será "target", la otra será "contact". Para esto se emplea un "wizard" que permite seleccionar gran cantidad de propiedades de los elementos. Se puede trabajar con contacto simétrico o asimétrico; en el primero ambas superficies o líneas pueden ser "contact" o "target", en el segundo se define el carácter de cada una. Las superficies "target" deben

ser las planas, cóncavas, o las de mayor radio de curvatura.

Se debe tener un gran cuidado al colocar los elementos de contacto. Es frecuente, dada la coincidencia de las líneas o superficies, confundirlas y mezclar elementos “contact” con elementos “target” en la misma superficie o línea, lo cual trae después consecuencias como movimiento de los sólidos, pérdida del contacto entre cuerpos, etc. Para evitar este error se deben visualizar los elementos de contacto usando la opción “view pair”, para precisar por separado la colocación de los “contact” y los “target”. Además es importante también la posición de los elementos de contacto en la línea o superficie; cada elemento tiene definida una normal que debe estar dirigida hacia el elemento complementario, de no ser así, en el mismo “view pair” se puede resolver el error.

Los elementos de contacto, como otros tipos de elementos en ANSYS tienen opciones y “real constants”. Una ventana de opciones típica es la mostrada en la Fig. 3. de todas las opciones es importante definir las siguientes:

K2- algoritmo de contacto; penalty o Lagrange, o solo penalty.

K5- ajuste del contacto inicial: define condición inicial moviendo las superficies, se define conjuntamente con ICONT, K9 y K12.

K12- define el tipo de contacto, si se mantiene después de establecerse, carácter de las superficies, si no habrá deslizamiento, etc. De su valor se define FKOP.

El resto de las opciones se pueden dejar en “default” para la mayoría de los casos.

La ventana de “real constants” se muestra en la Fig. 4. De todas las mostradas las más importantes son las siguientes:

FKN- rigidez en la dirección normal de los elementos de contacto.

FTOL- penetración tolerable.

ICONT- distancia de contacto inicial.

FKOP- rigidez normal del elemento de contacto al separarse las superficies.

FKT- rigidez en la dirección tangencial del elemento de contacto. Se determina como μFKN .

TAUMAX- esfuerzo máximo de fricción, se define aproximadamente como $\sigma_y / \sqrt{3}$.

COHE- tensión de cohesión, se define para impedir el deslizamiento, incluso si la presión de contacto es nula.

Nótese que varias de las constantes tienen un asterisco. En esos casos si se da un valor positivo se calcula la constante en función de la rigidez de la capa de elementos estructurales donde se colocaron los elementos de contacto. Si se da un valor negativo se consideran los valores absolutos de las constantes, independientemente de las características de la capa de elementos estructurales. La primera vía se emplea cuando se desconocen los posibles valores, la segunda es la más recomendable, aunque requiere de un estudio inicial del problema.

FTOL es necesario definirla, aunque parezca una incongruencia con lo planteado en las restricciones del problema de contacto sobre la no-penetración.

Real Constant Set Number 13, for CONTA172		
Element Type Reference No. 23		
Edit Real Constant Set No. 13		
Target circle radius	R1	0
Superelement thickness	R2	0
Normal penalty stiffness *	FKN	-36
Penetration tolerance *	FTOLN	-1.2
Initial contact closure *	ICONT	1e-020
Pinball region *	PINB	0
Ini. allow. penetration * <	PMAX	0
Ini. allow. penetration * >	PMIN	0
Max. friction stress	TAUMAX	1e+020
Contact surface offset	CNOF	0
Contact opening stiffness *	FKOP	-1000
Tangent penalty stiffness *	FKT	0
Contact cohesion	COHE	0
(* input positive value for scaling)		
(* input negative value for absolute)		
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>		

Fig. 4 ventana de “real constants” para un elemento de contacto.

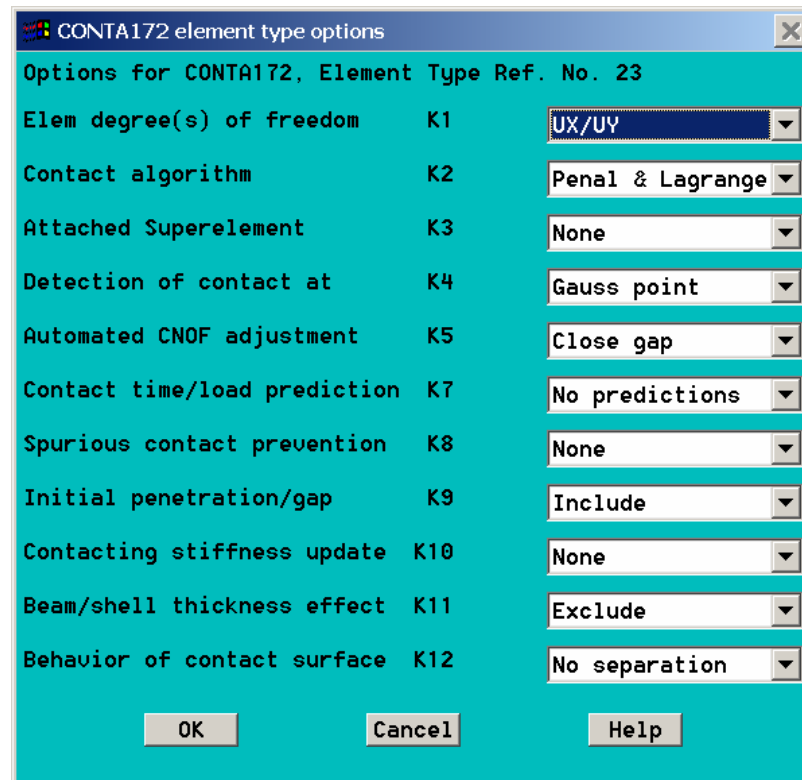


Fig. 3. Ventana de opciones de un elemento de contacto.

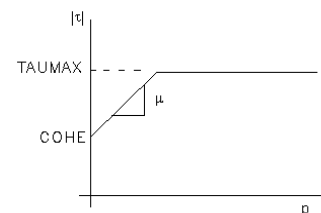
Lo que sucede es que al discretizar los sólidos, los contornos pierden su forma real; cuando se establecen entonces las condiciones iniciales (K5, ICONT, por ejemplo) ocurre que partes de los límites de los sólidos se superponen, ocurriendo una penetración geométrica. Más detalles se pueden ver en la “ayuda” de cada elemento de contacto. ICONT es la distancia inicial entre superficies; si no se define ANSYS da un valor inicial pequeño. Si se establece en K5 cerrar la holgura entre sólidos, o sea iniciar el algoritmo con un contacto inicial, se debe dar un valor suficientemente bajo a ICONT ($1e-20$ por ejemplo); nunca el valor 0, este se interpreta por ANSYS como omisión y entonces asigna el valor inicial del que se habló arriba.

FKOP multiplicado por FKN es la rigidez del elemento de contacto cuando después de haber ocurrido el contacto, las superficies tienden a separarse. Su valor depende de cómo se halla establecido K12. Incluso cuando se establece K12 como “no-separación” (después de haber contacto) puede ocurrir que FKN sea insuficiente para evitarla. En esos casos es preciso tomar un valor adecuado de FKOP.

Finalmente FKN es uno de los valores mas importantes a establecer. FKN es fundamental para lograr la solución numérica del problema de contacto. En los casos de contacto volumétrico su valor es normalmente elevado (buckling, etc.), en los casos de

problemas dominados por la flexión su valor es menor. FKN se puede estimar en estos últimos casos como la rigidez equivalente a la flexión de todo el sistema, bajo la carga externa que este aplicada, sea esta concentrada, distribuida o una combinación. Para estimar su valor se puede hacer uso de las fórmulas convencionales de la Resistencia de Materiales o de modelos por elementos finitos mas simples, sin incluir el contacto.

FKT se obtiene una vez definida FKN a partir del coeficiente de fricción. De su valor depende la tensión debida a la fricción. TAUMAX define el valor a partir del cual ocurre el deslizamiento. Si la tensión debida a la fricción alcanza TAUMAX ocurre el deslizamiento. El valor de COHE se debe establecer por debajo de TAUMAX, el gráfico siguiente ilustra como se relacionan. TAUMAX implícito es $1e20$, este valor se usa en casos de deformación etc., para COHE el valor implícito es nulo.

Fig. 5 Relación entre TAUMAX, COHE y μ .

Con el objetivo de estudiar el problema del contacto se trabajo primero con un modelo de dos láminas rectas de sección transversal constante en contacto empotradas en un extremo, simulando un muelle de ballesta de dos hojas. Este modelo se analiza por expresiones de Teoría de la Elasticidad en [13], y puede servir como “benchmark”.

Las hojas tienen 300 x 15 x 50 mm, de acero ABNT 5160, con $\mu = 0,3$ y $\sigma_y = 1010$ MPa., coef. de Poisson $\nu = 0,3$. Se modelan los sólidos con PLANE 42, en total 2450 elementos, y CONTACT 172 como elemento de contacto

Se aplicó una carga distribuida de 10 N/mm, en la lámina superior, dirigida hacia la otra lámina, o sea como presión. La solución se obtuvo en 80 iteraciones, la carga se aplicó en un tiempo de 0.01, llegando a 17 sub steps, se trabajo con pequeños desplazamientos. Se tomaron como criterios de convergencia la fuerza y el desplazamiento con una tolerancia de 0.005 %. El resultado es de $UY = 1.852$ mm en el extremo más alejado del empotramiento. Obsérvense los gráficos de deformación, holgura entre láminas y presión entre láminas en la Fig. 8.

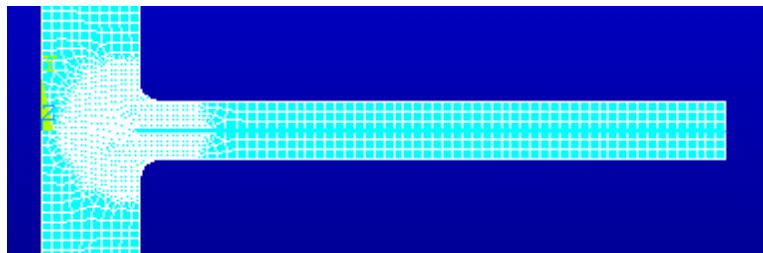


Fig. 6. Modelo de dos hojas

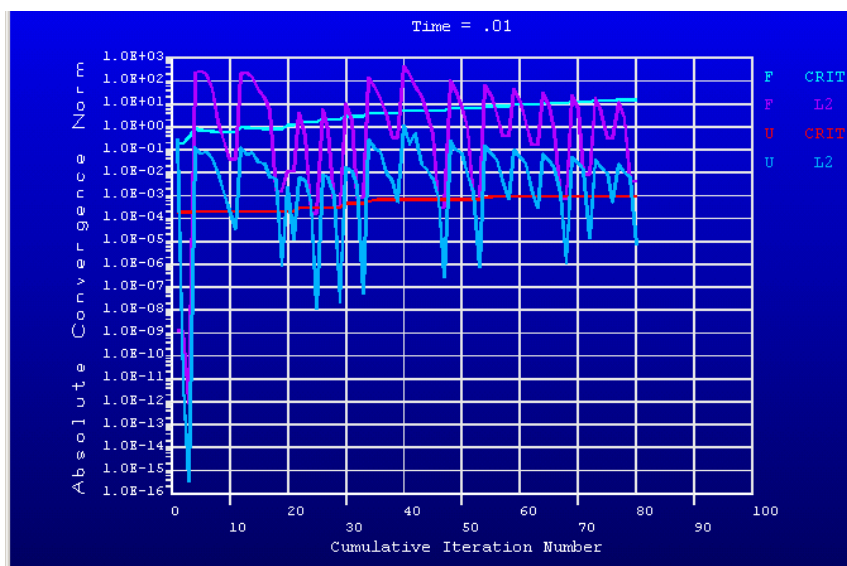
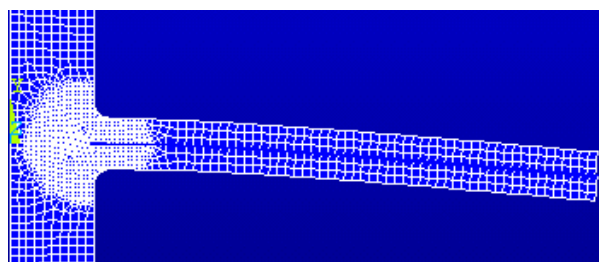


Fig. 7 gráfico de convergencia, modelo de dos hojas.



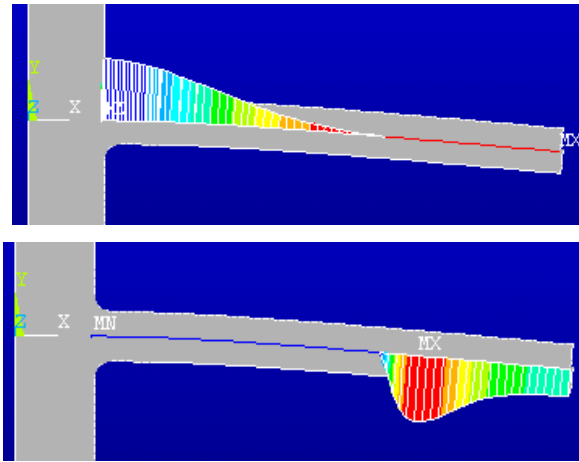


Fig. 8, deformación, holgura y presión entre láminas.

El valor de 0.01 de tiempo de aplicación no tiene significado dinámico, solo sirve como variable para controlar la aplicación gradual de la carga.

Los valores de FKN, FKT, etc. se estimaron a partir de aplicar la misma carga a una sola lámina. Según [14], el desplazamiento en el extremo, para una lámina viene dado por:

$$UY = \frac{a_1 q_0 l_1^4}{8} \quad [11]$$

el resultado sería 3.58 mm. Si se divide el valor total de la carga entre este desplazamiento se obtendría un equivalente a la rigidez de la lámina y si se divide entre dos (dos láminas iguales) se tendría el equivalente a la rigidez del sistema. Este último valor es 418 N/mm y es el usado como FKN y para hallar el resto de los parámetros necesarios.

Los resultados considerando las dos láminas según (13) serían:

$$UY = \frac{a_1 q_0 l_1^4}{8} \left[1 - \frac{a_1}{6(a_1 + a_2)} (\alpha^3 - \alpha [\alpha^2 - 4\alpha + 6] - \beta) \right]$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & (0 < \alpha \leq 2 - \sqrt{2}) \\ (\alpha - 2 + \sqrt{2})^2 (1 - \alpha) [8 + 6\sqrt{2} - (5 + 4\sqrt{2})\alpha] & (2 - \sqrt{2} \leq \alpha \leq 1) \end{cases} \quad [12]$$

Donde:

a_1 , a_2 elasticidad de las láminas 1 y 2

q_0 carga distribuida

l_1 longitud de la lámina 1

α relación entre longitudes de láminas 1 y 2

Para el modelo se tiene que ambas láminas son iguales, por lo que α es 1 y β es nulo. El término entre corchetes en [12] es 0.5. Si se compara con [11] se verá que para una viga empotrada bajo carga distribuida, la deformación en el extremo es idéntica al término fuera de los corchetes. O sea al colocar una viga adicional, el desplazamiento se reduce a la mitad.

El resultado según estas expresiones es de 1.791 mm, o sea hay un error del 3% respecto al resultado por elementos finitos.

5. Modelo del muelle de ballesta.

La ballesta consta de 11 láminas de 3/8 pulg. por 90 mm de ancho y diferentes longitudes (ver tabla 1). El material es acero ABNT 5160, con los límites:

$\sigma_y = 1010$ MPa $\sigma_R = 1200$ MPa HB = 350E=2.1e 5 MPa $\nu = 0.3$

No. de láminas	Longitud, mm
3	1060
1	770
1	660
1	600
1	510
1	440
1	380
1	320
1	220

La ballesta soporta una carga de 40 kN con una deformación de 100 mm. La estimación de FKN se realiza a partir de estos valores. La rigidez del sistema sería de 400 N/mm, que multiplicado por 1/11 da como resultado FKN= 36 N/mm. Este valor será tomado para cada uno de los set correspondiente a elementos de contacto. En realidad, esta es una aproximación grosera, se podría repartir mas uniformemente la rigidez total teniendo en cuenta el largo desigual de las láminas, o sea, dando una FKN mayor al par de contacto entre las dos hojas menores y una menor al formado por las hojas principales. No obstante, se tiene en cuenta que interesan los valores iniciales, el propio procedimiento de cálculo numérico ira buscando el resultado más correcto a partir de esta información.

En la modelación de un muelle de ballesta se decidió trabajar en 2D, usando para el cuerpo de las hojas el PLANE 42. Se usó en estado tensional plano con espesor (plane stress with thickness) para considerar el ancho de las hojas. La malla tiene elementos de 5 mm de largo.

Como elementos de contacto se emplean también CONTACT 172. En total el modelo tiene 5970

elementos, de los cuales 3264 corresponden a los sólidos y 2706 son de contacto.

El resto de los parámetros de los pares de contacto se puede ver en la Fig. 9.

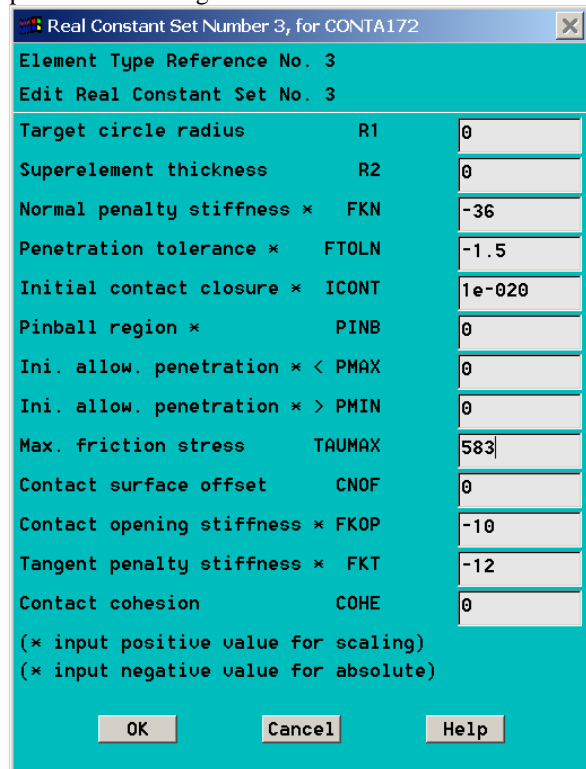


Fig. 9 ventana de real constant de un par de contacto.

Para todos los pares se usan estos valores, excepto para el formado por la hoja más corta con el soporte, que tiene $FKOP = 1000$ para evitar la separación. En el centro de la ballesta existe un tornillo que mantiene la posición de todas las láminas, este se modela haciendo que los nodos comunes entre hojas en la línea de simetría vertical tengan igual UX y UY. Este detalle es

esencial, de no colocar esta restricción la matriz rigidez del sistema se hace rápidamente singular, problema muy frecuente en modelos de contacto. De aquí la importancia de definir correctamente todas las restricciones al movimiento del modelo: a mas restricciones, más rápida convergencia.

La carga se aplica en 0.01, se consideran grandes desplazamientos, tolerancias de 0.5 % en fuerzas y desplazamientos. La solución se obtiene en 63 iteraciones y 15 sub steps. Los principales resultados se observan en las figuras de la 10 a la 15. El desplazamiento máximo es de 102 mm, un error del 2 % respecto a lo dado por el fabricante. El esfuerzo máximo equivalente según Von Mises es de 865 MPa en el nodo 194.

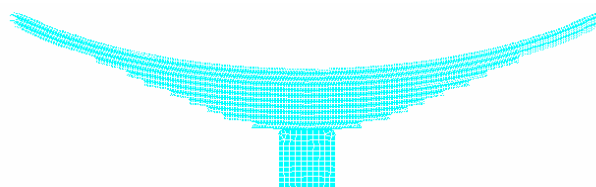


Fig.10, modelo de la ballesta.

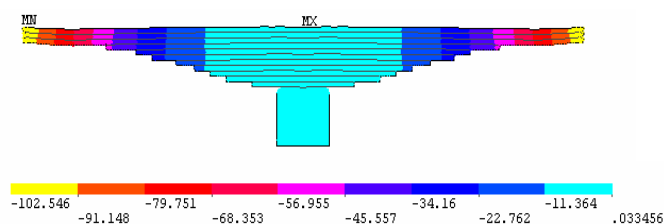


Fig.11, ballesta deformada a 40 kN, $UY_{max} = 102$ mm

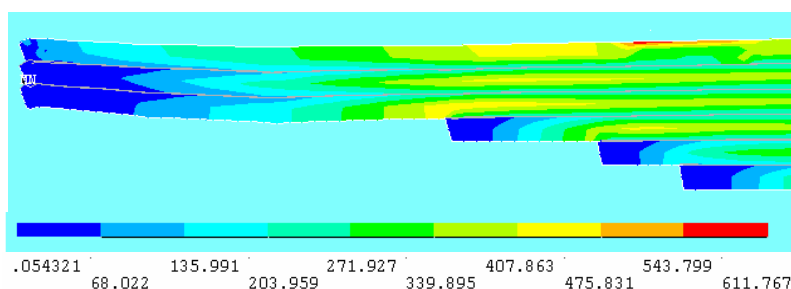


Fig. 12, σ_{VM} , los mayores valores están en la lámina mayor.

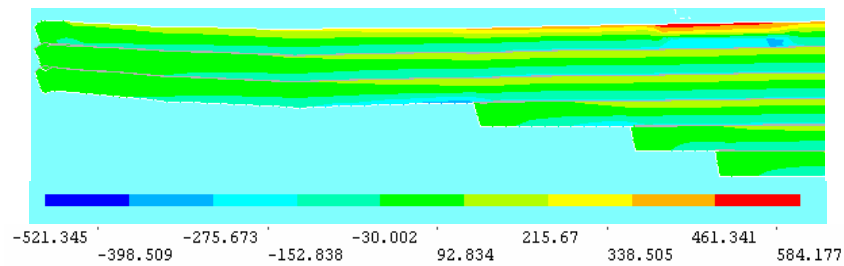
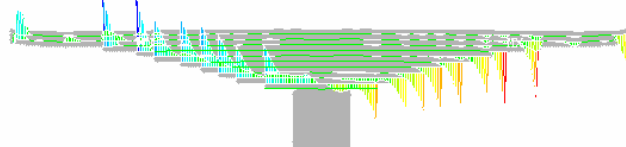
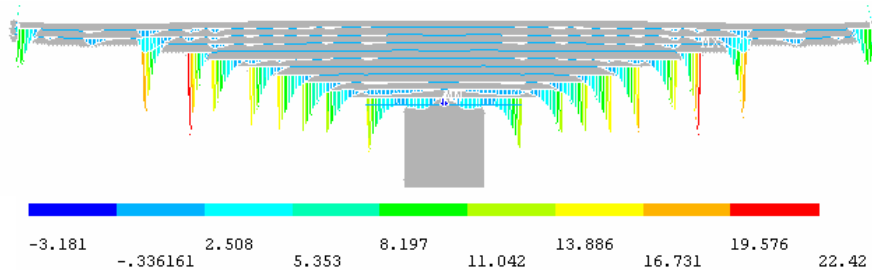
Fig. 13, σ_x mayores en hoja superior.Fig. 14, $\sigma_{\text{fricción}}$ 

Fig. 14, presión entre láminas

Los resultados muestran una buena correspondencia entre el desplazamiento dado por el fabricante y el obtenido. Los esfuerzos máximos según Von-Mises se obtienen en las caras de la lámina superior y en las caras de la láminas superior, llegando a 826 MPa.

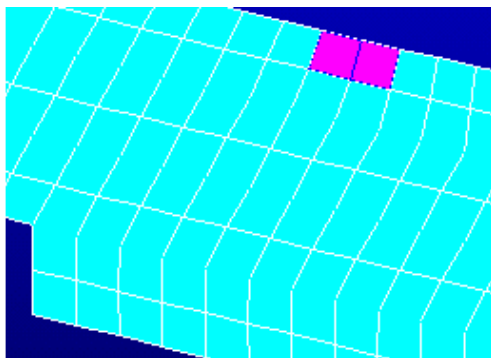


Fig. 15, posición de los elementos mas cargados

Los esfuerzos fundamentales se deben a la flexión, en ambos casos σ_x es muy superior al resto de los esfuerzos. El estado tensional se puede caracterizar como casi lineal, pues los esfuerzos principales son casi nulos excepto σ_1 .

Al comparar estos esfuerzos con $[\sigma_y]$, llegan a cerca del 81 %, valor algo elevado. Sería recomendable el empleo de una malla más fina en estas zonas y la modelación mas precisa del apoyo para confirmar este resultado. De acuerdo a estos resultados, a carga estática el coef. de seguridad será de 1.22. En [6] se recomienda como mínimo 1.3 por lo que este resultado daría dentro de lo establecido.

Vale señalar que cuando se empleen mallas de diferentes grados para los sólidos, los elementos de contacto que se colocan sobre estos también tienen diferentes tamaños. En este caso hay que tener mucho cuidado al definir propiedades y “real constant” pues las que se definen en relación con características de los elementos subyacentes se regirán por los mayores valores de estos elementos. En estos casos conviene definirlo todo en valor absoluto, para no tener dudas.

Finalmente el comportamiento de la carga contra la deformación tiene la forma siguiente, fig. 16

Puede verse como la variación de la carga contra la deformación (rojo) es no-lineal y además como este comportamiento disminuye con la elevación de la carga y por lo tanto del desplazamiento.

La rigidez del muelle de ballesta, calculada como FUERZA / DESPLAZAMIENTO se mueve en un rango estrecho, de aproximadamente el 2 %.

6. Breve análisis dinámico.

La influencia de las características de la ballesta en la dinámica de la suspensión es evidente. Al modelar la dinámica de un vehículo que interactúa con el camino, las cargas que llegan a la estructura son filtradas, amplificadas y transformadas por la suspensión. El carácter no-lineal del muelle de ballestas constituye una dificultad adicional a las propias de este tipo de análisis.

El amortiguamiento de la ballesta es del tipo de fricción o de Coulomb, no depende de la velocidad ni

del desplazamiento, es un valor que depende de la posición y cuya variación con la posición es no-lineal. En [22] se dan abundantes valores de la fuerza de fricción según la carga sobre la suspensión, o sea según la deformación. También queda clara la variación no-lineal de la fuerza de fricción.

Se realizó primero un análisis modal del muelle de ballesta, dando como frecuencias naturales las siguientes:

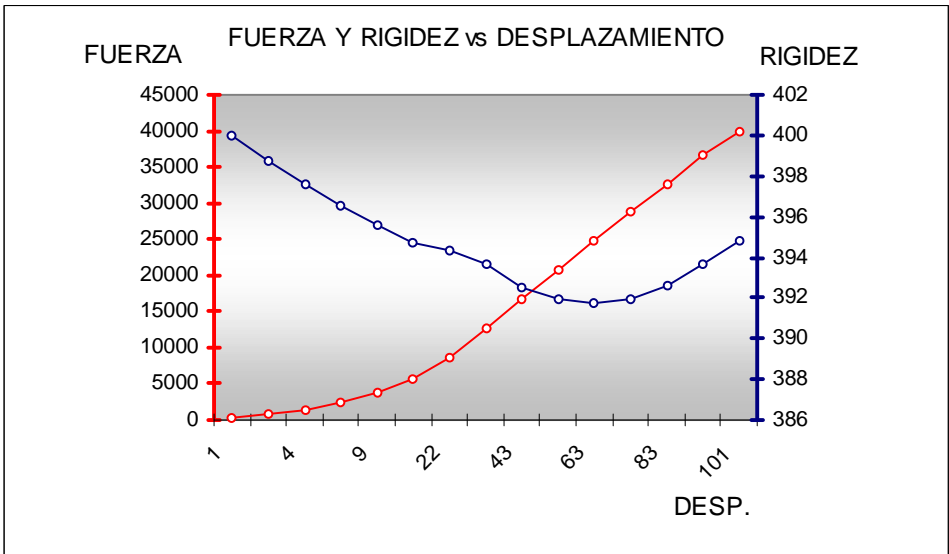







Fig. 16 Carga y rigidez contra deformación.

Modo vibración	frec. con $\mu = 0.30$	frec. con $\mu = 0$	dif. %
	1.1292	0.992	12 %
	2.3880	1.3518	43 %
	5.6915	4.023	29 %
	6.6373	5.385	18 %
	9.8283	7.631	22 %

Como se observa al incluir la fricción de Coulomb en el modelo, las frecuencias naturales aumentan como promedio un 25 %.

Esto se debe al aumento de la rigidez del modelo, en su sentido más amplio. Es decir, al considerar la fricción entre las láminas existe un incremento en la resistencia a las deformaciones, ya estas no dependen solamente de la elasticidad del material del sistema.

La función respuesta de frecuencias FRF, cuando el muelle de ballesta es excitado por fuerzas variables en sus extremos, da una representación de cuales de estos modos son excitados. Se aplicó la fuerza de 20 kN en cada extremo, con frecuencia variable entre 0 y 20 Hz, ambas en fase. Se obtuvo la FRF en los mismos puntos de aplicación de la fuerza y en los nodos que están debajo de estos en las otras dos hojas principales.

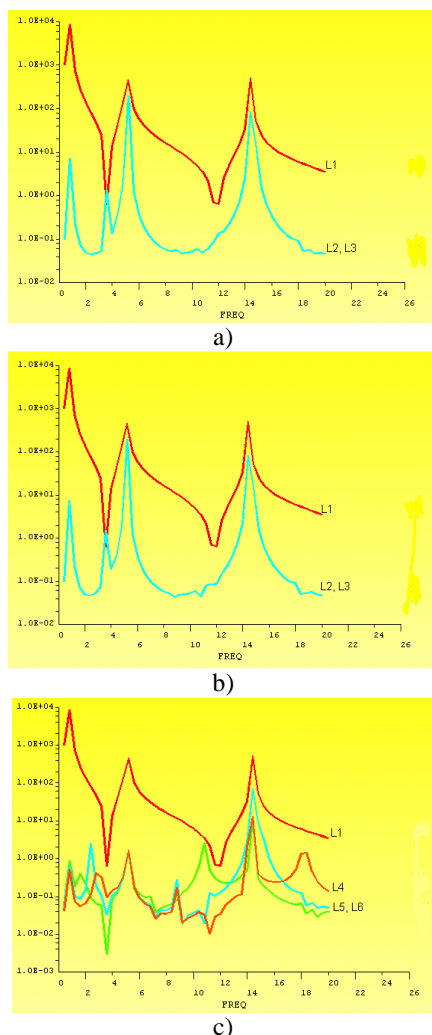


Fig. 17. Función respuesta de frecuencias.

En Fig. 17 (a) y (b) se tiene la FRF de los extremos derecho e izquierdo del muelle de ballesta, en rojo esta la FRF de los nodos de aplicación de la carga, la FRF de

los otros dos nodos en cada caso coinciden. Para estos nodos se excitan la primera, tercera y sexta (no incluida en este trabajo) frecuencias naturales. Nótese como para los nodos de las hojas debajo de la superior, hay una resonancia directamente en la primera antiresonancia de la hoja superior.

En Fig. 17 (c) se tiene la FRF del nodo derecho de la hoja superior, donde se aplica la carga y los nodos de los extremos de las hojas por debajo de las principales de ese mismo lado. Para estos nodos (o láminas) se excitan las segunda y quinta frecuencias naturales y alguna que otra adicional.

Al repetir las FRF sin considerar la fricción se obtienen resultados muy semejantes, solo que para las frecuencias naturales calculadas sin considerar la fricción, Fig. 18. Nótese como también los nodos de las hojas más cortas se mueven en frecuencias naturales distintas a las de la hoja superior.

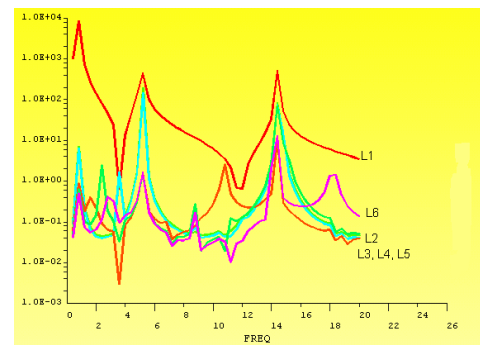


Fig. 18. FRF sin considerar la fricción.

Los valores de frecuencias naturales obtenidos están en el rango citado en la literatura. En [15] se cita que la frecuencia natural más baja que puede excitar la suspensión de un vehículo pesado está alrededor de 1.5 Hz.

En [6] se hace referencia a que para una suspensión, frecuencias naturales por debajo de 1 Hz pueden causar mareo a pasajeros, y por encima de 2.5 Hz pueden causar sensación de marcha muy incomoda. La mayoría de las suspensiones tiene su primera frecuencia natural entre 1.5 y 2 Hz.

Atendiendo a lo anterior, se considera entonces que el resultado de 1.12 Hz para la primera frecuencia natural esta dentro de lo establecido para este tipo de suspensiones. De todas formas sería adecuado un cálculo más riguroso de esta frecuencia teniendo en cuenta la rigidez del neumático y las masas.

7. Conclusiones.

Se realizó un estudio del problema del contacto aplicado a los muelles de ballesta, que permitió obtener

los parámetros que más influyen en la modelación por elementos finitos. Fue obtenido un modelo de muelle de ballesta automotriz de 11 láminas, que se corresponde en sus resultados con los datos dados por el fabricante y la información que aparece en la literatura. Se obtuvieron los esfuerzos máximos a carga estática, las frecuencias naturales y modos de vibración del conjunto, todo esto considerando la fricción. Del análisis dinámico se vio que la fricción entre láminas influye en las frecuencias naturales.

Agradecimientos.

Este trabajo ha sido posible gracias a la ayuda prestada por CAPES dentro del programa de colaboración entre Brasil y Cuba.

8. Bibliografía.

- 1-Al-Qureshi, H. A. : Automotive leaf spring from composite materials. *Journal of Material Processing Technology*, 118, 2001. pp 56-61, Elsevier.
- 2-Ach K., Alart P., Barboteu M., Lebón F., Mbodgi B.: Parallel frictional contact algorithms and industrial applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp 169-181, 1999, Elsevier.
- 3-Barlam D., Zahavi E.: The reliability of solutions in contact problems. *Computers and Structures*, 70, pp 35-45, 1999, Pergamon Press.
- 4-Bathe, K. J.: Finite elements procedures. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- 5-Bernaldo de Queiros, A.: Cálculo rápido de muelles y ballestas. Edit. Labor, 1969.
- 6-Best Christian et al: Basic Utility Vehicle Suspension Design. Supplemental Report, University of Texas at Austin, 2002.
- 7-Gerdes J. C., et. al: Safety performance and robustness of heavy vehicles AVCS. California PATH program. Report MOU-390, 2002.
- 8-Gu R. J., Murty P., Zheng Q.: Use of penalty variable in finite elements analysis of contacting objects. *Computers and Structures*, 80, pp 2449-2459, 2002, Pergamon Press.
- 9-Jhonson D. Principles of simulating contact between parts using ANSYS. (sin fecha).
- 10-Lebon F.: Contact problems with friction: models and simulation. *Simulation modeling Practice and Theory* 11, pp 449-463, 2003. Elsevier.
- 11-Mijar A. R., Arora J. S.: Review of formulations for elastostatic frictional contact problem. *Structures Multidisciplinary Optimization*, No. 20, pp 167-189. Springer-Verlag, 2000.
- 12-Mukhopadhyay N. K. et al.: Premature failure of a leaf spring due to improper material processing. *Engineering Failure Analysis*. Vol 4, No. 3, 1997, pp 161-170, Elsevier
- 13-Osipenko, M. A. et al.: A contact problem in the theory of leaf spring bending. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 2003; Pergamon Press,
- 14-Pisarenko G. S. et al: Manual de Resistencia de Materiales. Ed. Mir, 1985.
- 15-Potter C.: Assessing the relative road damaging potential of HGV. *Proceeding of International Symposium on Heavy Vehicles Weight and Dimensions*, Michigan, 1995.
- 16-Refaat M. H., Meguid S. A.: On the contact stress analysis of spur gears using variational inequalities. *Computers and Structures*, Vol. 57, No. 5, pp 871-882, 1995, Pergamon Press.
- 17-Rudakov, R. N. et al.: Optimization and investigation of the foot prosthesis operating characteristic. *Russian Journal of Biomechanics*, 1-2, 1997.
- 18-Shokrie M. M. , Rezaei D.: Analisis and optimization of a composite leaf spring. *Composite Structures*, 60, 2003, pp 317-325, Elsevier.
- 19.URL:<http://www.citroen.mb.ca/citroenet/html/suspension1.htm>
- 20.URL: <http://www.motorera.com/history/hist08.htm>.
- 21-Verheul C. and Sayfield Int.: Implementation of a leaf spring model in ADAMS/Rail. Sayfield International, Adams/Rail UC, 1999
- 22-Winkler C. et al: Parameter measurements of highway tractor and semi-trailer. Technical report UMTRI-95-47, Univ. of Michigan Transportation Research Institute, December 1995.

Laminated spring model considering the friction between leaves.

Abstract: A finite element model of a real laminated spring under bending should include the phenomena of contact and friction between leaves, in order to obtain values of displacements, stresses, gap, etc. close to reality. Considering contact and friction leads to a non-linear problem, which must be solved using numerical methods (Newton-Raphson), resulting in a classic optimization problem with constraints. The success of solution depends strongly on boundary conditions and initial values. A strategy for determining penalty values in the case of a multi leaf bending problem is presented, allowing a good correspondence with real displacements. The non-linear behavior of the leaf spring suspension referred to spring rate is shown. The modal analysis also gave firsts natural frequencies in the usual span for trucks and semi-trailers.

Key words: Laminated spring, contact, vibration.